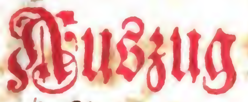





Christian Wolff
Hochfürstl. Heßischen Hof Rath und
Mathem. et Philos. Prof. Primario der
Königl. Groß-Britannischen wie auch der Königl.
Preuß. Societät der Wissenschafften Mitglied
Rosbach sc. Lipsiæ



Auszug
Aus den
Anfangs-Gründen
Aller
Mathematischen Wissenschafften,
Zu
Bequemerem Gebrauche Der Anfänger
auf Begehren verfertiget
Von

Christian Wolffen,
Königl. Schwed. Hochfürstl. Heßischen Hof-Rathe,
Mathem. & Phil. Prof. primario zu Marburg, Prof. honorario
zu St. Petersburg, der Königl. Groß-Britannischen, wie auch
der Königl. Preußischen Societät der Wissenschafften
Mitgliede.

Die vierdte Auflage verbessert und vermehrt.

Mit allergnädigsten PRIVILEGIIS.

Franckfurt und Leipzig, A. MDCCXXXII.
Zu finden in der Rengerischen Buchhandl.


LIBERTÉ ET PATRIE
DON FAIT À LA
Bibliothèque Cantonale
par feu Monsieur Henri
Struve, professeur de
chimie et de minéralogie
en 1826.
SIBER



Vorrede.

Ich pflege die Mathematick aus zwey Ursachen zu recommendiren: einmahl wegen der unvergleichlichen Ordnung, in welcher sie ihre Sachen gründlich ausführet, darnach wegen ihrer Lehren, welche sowohl in gründlicher Erkänntniß der Natur und Kunst, als im menschlichen Leben vielfältig genutzet werden. Die Ordnung ist dasjenige, warum ich die Mathematick einem jeden, der studiret, nothwendig zu seyn erachte. Denn ich bin mit PHILIPPO MELANCHTHONE der gewissen Meinung, es könne niemand etwas in gründlicher Ordnung ausführen, welcher nicht in der Mathematick sich mit Fleiß geübet. Und deswegen billige ich die Gewohnheit der Griechischen Weltweisen, welche niemanden zum Studiren liessen, der nicht vorher

die Arithmetick und Geometrie erlernet hatte. Nehmlich, wer was gründliches studiren will, der muß eine Fertigkeit haben, alles deutlich zu begreiffen, und genau zu untersuchen, ob dasjenige, was er höret oder lieset, der Wahrheit gemäß sey oder nicht. Ja auch diejenigen, welche die Wahrheiten der Christlichen Religion gründlich einzusehen haben, müssen nicht mit einem blinden Köhler-Glauben zu ihren Lehrern kommen und etwas bloß deswegen für wahr annehmen, weil es der Hochgelehrte Mann, an den man sie zum nöthigen Unterrichte verwiesen hat, für wahr ausgiebet. Es ist nicht genung, daß er ihnen die Wahrheit saget, sondern sie müssen es auch begreiffen, daß es Wahrheit sey, das ist, daß die von ihm gemachte Erklärung der Schrifft richtig und die von ihm behauptete Sätze aus dieser richtigen Erklärung durch bündige Schlüsse folgen. Denn da Paulus nicht leiden will, daß die Gläubigen sollen Kinder am Verständniß werden (a), das ist, wie die Kinder ohne Uberlegung annehmen, was ihnen von einem vorgesaget wird, von dem sie eine gute

(a) 1. Cor. XIV. 24. conf. Hammondi Paraphrasis.

gute Meinung haben, und aus dem Gedächtniß nachsagen, wovon nichts in Verstand kommen ist; so kan auch kein Lehrer, der Paulisch gesinnet ist, von seinen Zuhörern begehren, daß sie sich wie die kleinen Kinder einwickeln lassen, wie es ihm gefället. Solche Kinder müssen sich wägen und wiegen lassen von allerley Wind der Lehre (b), weil der wahre Lehrer nichts vor sich hat, warum er dieses fordern könnte, das nicht auch der Verführer vor sich anführen könnte, als welcher sowohl die Wahrheit zu haben vermeinet als der andere, dem etwan das blinde Glück dazu verholffen. Alle Fertigkeit kommet durch die Ubung, nicht aber durch Erlernung der Regeln, die man in acht nehmen muß. Derowegen wenn gleich in der Vernunffts-Lehre alle Regeln auf das gründlichste erkläret werden, die man Sachen deutlich zu begreiffen und vollständig zu erweisen in acht nehmen muß; so kan doch die Vernunffts-Lehre niemanden das Vermögen geben, die Regeln in fertige Ubung zu bringen. Es verhält sich hier nicht anders, wie mit dem Gesetze. Das Gesetze zeiget zwar, was gut und böse ist, und kommet dannenhero daraus Erkänntniß der Sünde; aber es giebet nicht das

(b) Eph. IV. 14.

Vermögen zu einem tugendhafften Wandel. Die Ubung nun in deutlichen Begriffen und ausführlichen Beweisen hat man in der Mathematick, wenn man sie mit gehörigem Fleisse erlernet und daher giebet sie das Vermögen, die Vernunffts-Lehre ohne einigen Fehltritt auszuüben. Und um dieser Ursachen willen muß die Mathematick vor der Vernunffts-Lehre erlernet werden, wenn man in richtiger Ordnung ohne einigen Zeit-Verlust studiren will. Es ist aber ohne mein Erinnern klar, daß man diesen Nutzen von der Mathematick nicht zu erwarten hat, wenn nicht die von den alten Geometris gebrauchte Lehr-Art in allem auf das sorgfältigste in acht genommen wird: denn nicht die mathematische Wahrheit, sondern die Ordnung, in welcher sie gründlich erkannt wird, ist das Mittel, wodurch der Verstand des Menschen geändert wird. Daher fället dieser Nutzen der Mathematick weg, wenn man ihre Lehren auf gemeine Art vorträget, nach welcher sie mehr in das Gedächtniß, als in den Verstand gefasset werden. Dieses war die Ursache, warum ich meine Anfangs-Gründe der mathematischen Wissenschafften heraus gab, und darinnen auch bey solchen Sachen, die in mathematischer Gewißheit völlig abzuhandeln viel zu weitläufftig fallen würde, die

in

in der Geometrie bey den Alten übliche Ordnung, so viel möglich, in acht nahm. Ja weil es denen, welche die Wahrheit einzusehen anfangen, nicht anders ergehet, als einem, der aus dem danckelen ins helle kommet, daß er nehmlich den allzu grossen Glantz des Lichtes nicht vertragen kan, sondern dadurch einigen Schmertz in seinen Augen empfindet; so habe ich auch in den deutschen Anfangs-Gründen die völlige Schärffe weder im Erklären, noch im Beweisen in acht genommen, hingegen diesen Mangel, den Anfänger und in gründlicher Erkänntniß ungeübte für eine Vollkommenheit ansehen, in dem Lateinischen Wercke, sonderlich den beyden Grund-Säulen der mathematischen Wissenschafften, der Arithmetick und Geometrie, ersetzet, da ich sowohl im Erklären, als im Beweisen so weit gegangen, als immer jemand fordern kan. Nehmlich die Natur thut weder in der Seelen, noch in dem Cörper einen Sprung; sondern alle Veränderungen geschehen nach und nach. Derowegen wenn der Verstand des Menschen geändert werden soll, kan er nicht auf einmahl zu dem höchsten Grade der Vollkommenheit gebracht werden; vielmehr muß der Anfang zur Vollkommenheit unter vielen zurückständigen Unvollkommenheiten gemacht werden. Unterdessen aber muß

doch der Anfang auch ein Anfang seyn, und nicht allein einer heissen, das ist, auch bey der ersten Erlernung der Mathematick muß einige Veränderung im Verstande vorgehen und dadurch einige Fertigkeit erreichet werden, zu welcher man nicht würde kommen seyn, wenn man an deren statt etwas anders getrieben hätte. Demnach muß die Mathematick mit den ersten Anfängern dergestalt vorgenommen werden, daß sie unvermerckt das Bild der richtigen Ordnung in ihrem Verstande erblicken, und von der Gründlichkeit einigen Geschmack bekommen. Derowegen weil vielen meine Anfangs-Gründe der mathematischen Wissenschafften zu weitläufftig geschienen, als daß sie mit Anfängern in der gemeiniglich ihnen vorgesetzten Kürtze der Zeit könnten durchgegangen werden; über dieses auch einigen zu theuer vorkommen, und daher begehret worden, daß ich einen Auszug zu bequemeren Gebrauche der Anfänger sonderlich auf Schulen, verfertigen möchte; so habe ich wegen der grossen Begierde, die ich bey mir spüre, Verstand, und Tugend unter den Menschen zu einem höheren Grade zu bringen, als bißher unter ihnen angetroffen wird, mich leicht dahin bewegen lassen, diese Arbeit dergestalt über mich zu nehmen, daß ich ihnen einen Auszug gewähren möchte,

möchte, der an Grösse nicht die Helffte der Anfangs-Gründe erreichte, und doch in Ansehung des Haupt-Nutzens ihnen nichts nachgäbe. Damit aber dieser Nutzen nicht aussenbleibe, so achte vor nöthig, noch etwas von dem rechten Gebrauche dieses Buchs zu erinnern. Man muß vor allen Dingen dahin sehen, daß die Anfänger in der Arithmetick, Geometrie und Trigonometrie wohl geübet werden. Und kan man den Anfang schon mit den kleinen Knaben machen, welche die Anfangs-Gründe der Lateinischen Sprache auswendig lernen. Mit diesen nimmet man aus der Arithmetick bloß das Aussprechen der Zahlen und die vier Rechnungs-Arten in gantzen Zahlen vor, jedoch dergestalt, daß man sie allezeit fraget, warum sie dieses so und nicht anders machen, damit sie nicht allein den Grund der Rechnung einsehen und sie daher besser behalten, sondern auch angewöhnet werden, nichts ohne Grund von jemanden anzunehmen, ingleichen in allem, was sie sehen oder hören, um seinen Grund sich zu bekümmern: als welche Aufmunterung des Verstandes ein lehrbegieriges Gemüthe machet und zur Besserung des Verstandes mehr beyträget, als Unerfahrne glauben dörffen. Wenn sie eine Rechnungs-Art wohl verstehen, muß man sie auf die Erklärung führen,

die davon im Anfange des Buches gegeben worden, und durch Gegenhaltung der von ihnen gemachten Exempel zeigen, wie sie dasjenige darinnen erblicken, was in der Erklärung stehet. Hierdurch werden sie lernen einen Unterscheid machen zwischen dem, was sie deutlich und undeutlich begreiffen, dabey unvermerckt erlernen, wie man aus eintzelen Exempeln den darinnen verborgenen allgemeinen Begriff heraus suche, und zugleich sich gewöhnen auf ihr Thun und Lassen acht zu haben, auch nichts ohne Verstand vorzunehmen. Hören sie nun nach der Zeit bey reifferem Verstande die Regeln, nach welchem er in Erkänntniß der Wahrheit sich richtet, und die ich in meinem Buche von den Kräfften des menschlichen Verstandes vorgetragen habe; so wird ihnen das durch vorige Ubung erlangte Bild bald vor Augen schweben und werden ihnen die Exempel, darauf sie sich besinnen, alles klar und verständlich machen. In der Geometrie lehret man Anfänger anfangs nur die Figuren kennen, jedoch dergestalt, daß sie nicht allein den Nahmen zu nennen wissen, wenn man ihnen die Figur zeiget, sondern auch dasjenige hersagen können, woraus sie die Figur erkennen und von andern unterscheiden: zu welchen Fragen die daselbst gegebene Erklärungen dienlich sind.

Hier-

Hierdurch lernen sie deutliche Begriffe von undeutlichen unterscheiden: welches das erste ist, so in gründlicher Erkänntniß der Wahrheit zu beobachten. Nach diesem muß man sie auf die Zeichnung der Figuren führen, wodurch sie erkennen, wie sie möglich sind, und zugleich inne werden, daß man alsdenn erst eine Sache recht begreiffe, wenn man verstehet, wie sie seyn kan. Alsdenn kan man auch die Lehr-Sätze und die übrigen Aufgaben vornehmen, jedoch auf solche Weise, daß man nach den Bedingungen der Lehr-Sätze die Figuren zeichnen lässet und nach diesem durch Hülffe der Instrumente versuchet, ob der Satz richtig befunden wird und dasjenige eintrifft, was in der Aufgabe aufgegeben worden: welche Proben dergestalt einzurichten sind, daß sie so viel von dem Beweise in sich enthalten als möglich ist. Ein mehreres findet man von diesen mechanischen Beweisen, wie ich sie zu nennen pflege, unter dem Worte *demonstratio mechanica* in meinem Lexico mathematico. Endlich kan man zuletzt die Geometrie durchgehen, wie sie in dem Buche gedruckt ist, jedoch dergestalt, daß man die Beweise durch Fragen durchnimmet in der Ordnung, wie die Förder-Sätze mit ihren Hinter-Sätzen in denen dazu nöthigen Schlüssen in einer unverrückten Reihe an einander

ander folgen. Da man denn allezeit von denjenigen den Anfang machen muß, was entweder die Betrachtung der Figur, oder die Bedingungen der Lehr-Sätze und die Auflösungen der Aufgaben an die Hand geben und dadurch sich anderer Sätze erinnert, die vorhin ausgemacht worden, damit man etwas neues daraus schliessen kan: wie ich solches in meinem Lexico mathematico unter dem Worte *demonstratio* deutlicher gewiesen. Und finde ich es sehr dienlich, wenn man alle Sätze ordentlich unter einander hinschreibet, wie man darauf kommet. Auf solche Weise wird man nicht allein einen Geschmack von gründlicher Erkänntniß bekommen, sondern auch zugleich einer Sache ordentlich nachzudencken angeführet werden. Hat man die Arithmetick und Geometrie auf eine solche Art nach und nach durchgenommen; so wird man auch ohne Anstoß in denen übrigen Disciplinen fortkommen können. Jedoch wolte ich rathen, daß man in denselben durch nöthige Experimente oder Versuche erläuterte, was sich dadurch zeigen lässet: welches schon vorher geschehen könnte, ehe man in der Geometrie sich an die ernsthafften Beweise wagete. Wenn man dieses Buch auf die vorgeschriebene Weise brauchen wird; so zweiffele ich nicht, es werde mit dem Studiren bald ein anders

Aus-

Aussehen gewinnen. GOtt gebe, daß es bald geschehen möge! Noch muß ich dieses erinnern, daß in der andern Auflage hin und wieder einiges verbessert, auch einiges von neuem hinzu gesetzet, und einige wenige Druckfehler, welche in die erste Auflage eingeschlichen waren, sowohl im Texte, als den Figuren geändert worden. Halle, den 21. Jul. 1713.

Erinnerung
wegen der dritten Auflage.

IN der dritten Auflage hat man davor gesorget, daß sie accurat gedruckt würde, auch etwas weniges an einigen Orten gebessert. Marburg, den 6. Mart. 1728.



Inhalt
des gantzen Wercks.

Kurtze



Kurtzer Unterricht/ Von der Mathematischen Lehr-Art.

§. 1.

Die Lehr-Art der Mathematicorum, das ist, die Ordnung, deren sie sich in ihrem Vortrage bedienen, fänget an von den Erklärungen, gehet fort zu den Grund-Sätzen und hiervon weiter zu den Lehr-Sätzen und Aufgaben: überall aber werden Zusätze und Anmerckungen nach Gelegenheit angehänget.

§. 2. Die Erklärungen (*Definitiones*) sind deutliche Begriffe, dadurch die Sachen von einander unterschieden werden, und daraus man das übrige herleitet, was man von ihnen erkennet. Es sind aber dieselben zweyerley: Entweder Erklärungen der Wörter (*definitiones nominales*), oder Erklärungen der Sachen (*definitiones reales*).

§. 3. **Die Erklärungen der Wörter** geben einige Kennzeichen an, daraus die Sache erkandt werden kan, die einen gegebenen Nahmen führet. Als wenn in der Geometrie gesaget wird, ein Quadrat sey eine Figur, welche vier gleiche Seiten und gleiche Winckel hat.

§. 4. **Die Erklärungen der Sachen** sind ein klarer und deutlicher Begriff von der Art und Weise, wie die Sache möglich ist: Als wenn in der Geometrie gesaget wird, ein Circul werde beschrieben, wenn eine gerade Linie sich um einen festen Punct beweget.

§. 5. Wir nennen **einen Begriff** eine jede Vorstellung einer Sache in dem Verstande.

§. 6. Es ist aber mein **Begriff klar**/ wenn meine Gedancken machen, daß ich die Sache erkennen kan, so bald sie mir vorkommet, als z. E. daß ich weiß, es sey diejenige Figur, welche man einen Triangel nennet.

§. 7. Hingegen ist **der Begriff dunckel**/ wenn meine Gedancken nicht zulangen, die Sache, so mir vorkommet, zu erkennen, als wenn mir eine Pflantze gezeiget wird und ich bin zweiffelhafft, ob es eben dieselbige sey, die ich zu anderer

Zeit

Zeit gesehen und die diesen oder jenen Nahmen führet.

§. 8. **Der klare Begriff ist deutlich**/ wenn ich einem sagen kan, aus was für Merckmahlen ich die vorkommende Sache erkenne, als wenn ich sage, ein Circul sey eine Figur, die in eine in sich selbst lauffende krumme Linie eingeschlossen, deren jeder Punct von dem Mittelpuncte desselben gleich weit weg ist.

§. 9. **Ein klarer Begriff** aber ist **undeutlich**/ wenn man einem die Merckmahle nicht sagen kan, daraus man die vorkommende Sache erkennet: dergleichen ihr von der rothen Farbe habet.

§. 10. Es ist ein **deutlicher Begriff vollständig**/ wenn man auch von den Merckmahlen, die er einschliest, deutliche Begriffe hat. Als wenn man in der angegebenen Erklärung des Circuls (§. 4) auch einen deutlichen Begriff von der geraden Linie, von dem Puncte, von einem festen Puncte und von der Bewegung um dasselbe hat.

§. 11. Hingegen ist er **unvollständig**/ wenn man von den Merckmahlen, die er in sich fasset, keine deutliche Begriffe hat.

§. 12. In den Mathematischen Wissenschafften befleißiget man sich für allen Dingen auf deutliche und vollständige Begriffe, so wohl in den Erklärungen der Sachen, als in den Erklärungen der Wörter.

§. 13. Daher findet man in den folgenden Erklärungen keine Wörter, welche nicht entweder schon in den vorhergehenden wären erläutert wor-

den, oder als anders woher bekandt angenommen werden können.

§. 14. Ja wenn man in einigen Fällen mit einem undeutlichen Begriffe vergnüget seyn kan, so muß er so beschaffen seyn, daß man dazu bald ohne Mühe gelangen kan, und dannenhero von einer Sache, um derer Gegenwart man sich nicht sonderlich zu bemühen hat.

§. 15. Was die Erklärungen der Sachen betrifft, so zeigen dieselbigen, wie eine Sache möglich ist, das ist, auf was für Art und Weise sie entstehen kan (§. 4). Und derowegen hat man bey denselben auf zweyerley zu sehen, nemlich auf diejenigen Dinge, welche zu ihrer Möglichkeit etwas beytragen, und auf dasjenige, was sie dazu beytragen. Z. E. wenn ein Circul erkläret wird, daß er entstehe, wenn sich eine gerade Linie um einen festen Punct herum beweget; so erfordert man zu seiner Möglichkeit einen Punct und eine gerade Linie, der Punct soll unbeweglich seyn, und also die Bewegung der Linie reguliren, die gerade Linie aber soll sich dergestalt bewegen, daß sie wieder an den Ort kommet, wo die Bewegung sich angefangen hatte.

§. 16. Die Erklärungen so wohl der Wörter, als der Sachen können entweder vor sich insbesondere erwogen, oder mit anderen verglichen werden. Betrachtet ihr dasjenige, was in den Erklärungen enthalten ist, und schliesset etwas unmittelbahr daraus; so nennen wir solches **einen Grundsatz**. Z. E. wenn ihr bey der Erklärung des

des Circuls bedencket, daß die Linie, welche sich um den Mittelpunct herum beweget, immer einerley Länge behält: so werdet ihr bald begreiffen, daß alle Linien, welche aus dem Mittelpuncte an die Peripherie gezogen werden, einander gleich sind. Diese Wahrheit nun ist ein Grundsatz. In diesem Verstande braucht der Herr von Tschirnhausen dieses Wort: insgemein aber nennet man einen Grundsatz einen allgemeinen Satz, den man ohne Beweiß einräumet. Und so nehmen das Wort *Euclides* und alle alte und neue Geometræ.

§. 17. Die Grundsätze zeigen entweder, daß etwas sey, oder daß etwas könne gethan werden. Ein Grundsatz von der ersten Art ist, den wir erst aus der Erklärung des Circuls hergeleitet, daß nemlich alle Linien, die aus dem Mittelpuncte an die Peripherie gezogen werden, einander gleich sind. Hingegen ein Grundsatz von der anderen Art ist, der aus der Erklärung der geraden Linie fliesset, daß nemlich von einem jeden Puncte zu jedem Puncte eine gerade Linie könne gezogen werden. Im Lateinischen nennet man die Grundsätze der ersten Art *Axiomata*; die Grundsätze aber der andern Art *Postulata*.

§. 18. Weil nun die Grundsätze unmittelbahr aus den Erklärungen gezogen werden, haben sie keines Beweises nöthig, sondern ihre Wahrheit erhellet, so bald man die Erklärungen ansiehet, daraus sie fliessen. Man kan demnach nicht ehe versichert seyn, ob der Grundsatz wahr sey oder nicht,

 biß

biß man die Möglichkeit der Erklärungen untersuchet hat. Sonst weiß man nichts mehr, als daß die Grundsätze richtig sind, woferne die Erklärungen möglich sind. Man siehet hieraus zugleich die Ursache, warum **Tschirnhausen** die Grundsätze als solche Sätze beschrieben, die durch eine Erklärung begriffen werden (§. 16).

§. 19. Mit den Grundsätzen werden unterweilen die Erfahrungen vermenget. Man nennet aber **eine Erfahrung** dasjenige, welches man erkennet, wenn man auf seine Empfindungen acht hat. Z. E. ich sehe, daß, wenn ein Licht angezündet wird, alle Dinge, die um mich sind, sichtbahr werden, diese Erkäntniß wird eine Erfahrung genennet. Und demnach sind die Erfahrungen Sätze von eintzelen Dingen, weil ich nichts als eintzele Dinge empfinden kan.

§. 20. Wenn man verschiedene Erklärungen gegen einander hält und daraus schließt, was durch eintzeler Betrachtung zu erkennen unmöglich war, so nennet man solches einen **Lehrsatz** (Theorema). Z. E. wenn man in der Geometrie einen Triangel mit einem Parallelogrammo vergleichet, welches mit ihm einerley Grund-Linie und Höhe hat, und in dieser Vergleichung theils unmittelbahr aus den Erklärungen dieser beyden Flächen, theils aus anderen Eigenschafften derselben, die aus ihren Erklärungen schon vorher gefunden worden, schließt, daß der Triangel nur halb so groß ist als das Parallelogrammum:

mum: wird dieser Satz; **der Triangel ist die Helffte eines** *Parallelogrammi*, **welches mit ihm einerley Grund-Linie und Höhe hat**/ ein Lehrsatz genennet.

§. 21. Es ist aber bey jedem Lehr-Satze auf zweyerley zu sehen, nemlich einmahl auf **den Satz**/ darnach auf **den Beweiß**. Jener saget aus, was einer Sache unter gewissen Bedingungen zukommen könne oder nicht: dieser aber erkläret, wie unser Verstand dazu gebracht wird, daß er sich solches von der Sache gedencken kan.

§. 22. Die Gründe des Beweises sind theils die Erklärungen derjenigen Wörter und Sachen, die in dem Lehrsatze enthalten sind, theils auch die aus gedachten Erklärungen von eben diesen Sachen schon vorhin hergeleitete Eigenschafften. Weil man nun in der Mathematick nichts zu den Gründen annehmen lässet, als was entweder in den vorhergesetzten Erklärungen, oder daher geleiteten Grund- und Lehr-Sätzen enthalten; so pfleget man die Erklärungen und Lehr-Sätze jederzeit anzuführen, auf welche man den Beweiß gründet, theils damit ein jeder siehet, daß die angenommene Gründe des Beweises ihre Richtigkeit haben; theils damit diejenigen, welche die Gründe noch nicht erkandt oder auch wohl wieder vergessen haben, nachschlagen können und sich ihrer Gewißheit versichern.

§. 23. Die Art und Weise aus den gesetzten Gründen zu schliessen ist keine andere, als die längst in allen Büchern von der Logica oder Vernunft-

nunft-Kunst beschrieben worden. Es sind die Beweise oder Demonstrationes der Mathematicorum nichts anders als ein Hauffen nach den Regeln der Vernunft-Kunst zusammengesetzter Schlüsse. Daß demnach in denselben alles durch die so genandten Syllogismos geschlossen wird, nur daß man zuweilen, oder wohl meistens, einen von den Fördersätzen wegläßet, weil er entweder dem Leser, der sich den Beweiß zu gedencken bemühet, vor sich einfället, oder aus der beygefügten Citation leichte kan errathen werden. Dieses hat nicht allein Clavius an dem Beweise des ersten Lehr-Satzes in den Elementis Euclidis; sondern auch Herlinus und Dasipodius durch einige Bücher dieser Elementorum, und Henischius durch die gantze Rechen-Kunst gewiesen.

§. 24. Die Aufgaben handeln von etwas, so gethan oder gemacht werden soll, und werden in drey Theile eingetheilet, in **den Satz/ die Auflösung und den Beweiß.** In dem Satze geschiehet der Vortrag von dem, was gemacht werden soll. Die Auflösung erzehlet alles, was man thun muß, und wie man eines nach dem andern zu verrichten hat, damit geschehe, was man verlanget. Endlich der Beweiß führet aus, wenn das geschiehet, was in der Auflösung vorgeschrieben wird; so müsse man auch nothwendig erhalten, was man in dem Satze verlangte. Solchergestalt wird jede Aufgabe in einen Lehr-Satz verwandelt, wenn sie bewiesen werden soll. Es heisset nemlich überhaupt: **Wenn** man alles

thut,

thut, wie es die Auflösung erfordert, so geschiehet, was man thun solte.

§. 25. Zuweilen geschiehet es, daß man um besonderer Ursachen willen einen Satz auf einen besonderen Fall appliciret, oder auch aus demselben einen anderen Satz herleitet. Dergleichen Arten der Wahrheiten werden **Zusätze**/ (Corollaria) genennet.

§. 26. Endlich in den **Anmerckungen**/ die so wohl den Erklärungen, als Grund- und Lehr-Sätzen, ingleichen den Aufgaben beygefüget werden, pfleget man dasjenige, was noch dunckel seyn möchte, zu erläutern, den Nutzen der vorgetragenen Lehren anzudeuten, die Historie der Erfindung beyzubringen, und was etwan sonst nützlich zu wissen vorfället.

§. 27. Wer die bißher erläuterte Methode oder Lehr-Art betrachtet, wird ohne Mühe innen werden, daß sie allgemein ist, und in allen Wissenschafften gebraucht werden soll, wenn man anders richtige Erkäntniß der Dinge verlanget. Man nennet es aber die Mathematische, zuweilen auch gar die Geometrische Methode oder Lehr-Art, weil bißher fast die Mathematici allein, sonderlich in der Geometrie, sich derselben bedienet.

§. 28. Und darum, weil in der Mathematick diese Lehr-Art auf das allergenaueste in acht genommen wird, rühmet man von ihr, daß sie den Verstand des Menschen schärffe, das ist, geschickt mache, in alle Dinge, die er erkennen lernet,

tieffer und richtiger einzusehen, als ein anderer, der sich so genau und ordentlich zu dencken nicht angewöhnet.

§. 29. Es werden also dieses vortreflichen Nutzens diejenigen nicht theilhafftig, welche bloß einige mathematische Aufgaben und andere im menschlichen Leben zwar nützliche, aber vor und an sich selbst zur Mathematick eigentlich nicht gehörige Sachen lernen, oder auch von den mathematischen Wahrheiten nur eine gemeine Erkäntniß erlangen.

E N D E
des Unterrichts von der Lehr-Art.



An-

Anfangs-Gründe der Rechen-Kunst.

Die 1. Erklärung.

1. Die Rechen-Kunst ist eine Wissenschafft zu rechnen/ das ist/ aus einigen gegebenen Zahlen andere zu finden/ von denen eine Eigenschaft in Ansehung der gegebenen Zahlen bekandt gemacht wird. Z. E. Man soll eine Zahl finden, die so groß ist wie 6. und 8. zusammen.

Anmerckung.

2. Die Wissenschaft bedeutet eine Fertigkeit alles dasjenige/ was man von einer Sache behauptet/ aus unumstößlichen Gründen unwiedersprechlich darzuthun.

Die 2. Erklärung.

3. **Wenn man viele einzele Dinge von einer Art zusammen nimmet / entstehet daraus** eine Zahl. Z. E. Wenn man zu einer Kugel noch eine andere leget, so hat man zwey Kugeln. Leget man noch eine darzu, so hat man derselben drey. u. s. w.

Der 1. Zusatz.

4. Also erfordert jede Zahl eine gewisse Einheit, und lassen sich keine Zahlen mit einander vergleichen, auch nicht zusammen setzen, welche nicht aus einerley Einheiten entstanden. Z. E. Wenn ich

sage

sage 6; so muß eine jede Einheit, die zu dieser Zahl genommen wird, ein Ding von einer Art, als etwan ein Hund, ein Apffel, ein Haus, ein Thaler, ein Groschen seyn rc.

Der 2. Zusatz.

5. Eine Zahl wird grösser gemacht oder vermehret, wenn man andere Zahlen von ihrer Art hinzusetzet: hingegen wird sie vermindert, wenn man eine oder mehrere Zahlen von ihrer Art wegnimmet. Und weiter kan man keine Veränderung mit den Zahlen vornehmen. Es sind aber **Zahlen von einerley Art**/ die aus einerley Einheiten bestehen (§. 4).

Der 3. Zusatz.

6. Wenn eine Zahl vermehret wird, sind die Zahlen, so zu derselben gesetzt werden, entweder alle vor sich derselben gleich, als wenn man 6 etliche mahl nimmet, oder sie sind grösser und kleiner als dieselbe, als wenn man 6, 3, 5 rc. zusammen nimmet. Und dannenhero sind zwey verschiedene Arten eine Zahl zu vermehren.

Der 4. Zusatz.

7. Eben so ist klar, daß, wenn eine Zahl vermindert wird, man entweder eine, oder mehrere kleinere Zahlen nach einander von derselben wegnimmet; oder auch nur eine Zahl so viel mahl von ihr weg thut, als man kan. Und demnach sind zwey verschiedene Arten eine Zahl zu vermindern.

Anmerckung.

8. Hieraus sind die vier Rechnungs-Arten / nemlich Addiren / Subtrahiren / Multipliciren und Dividiren

diren entstanden/ wie aus folgenden Erklärungen abzunehmen.

Die 3. Erklärung.

9. **Addiren heisset eine Zahl finden/ welche verschiedenen Zahlen von einer Art zusammen genommen gleich ist.** Die gegebenen Zahlen werden die **Summirenden**; die gefundene aber wird die **Summe** oder das **Aggregat** genennet.

Zusatz.

10. Weil eine jede Zahl aus vielen Einheiten zusammen gesetzt ist (§. 3), so geschiehet das Addiren, wenn man zu der einen gegebenen Zahl die Einheiten der anderen nach und nach zehlet.

Anmerckung.

11. Die Einheiten der Zahlen stellet man sich anfangs durch die Finger vor und verrichtet das zum Addiren nöthige Zehlen so lange durch die Finger/ biß man in dem Gedächtnisse behalten/ wie viel eine jede kleine Zahl zu einer anderen Zahl genommen/ ausmachet / z. E. daß zwey und drey fünfe; sechs und achte aber vierzehen ist.

Die 4. Erklärung.

12. **Subtrahiren oder Abziehen ist so viel als eine Zahl finden/ welche mit einer gegebenen Zahl von einer Art zusammen genommen einer anderen gegebenen Zahl gleich ist.** Die Zahl, welche durch Subtrahiren gefunden wird, heisset die **Differentz** oder **der Unterscheid** der gegebenen Zahlen.

Zusatz.

13. Weil eine jede Zahl aus vielen Einheiten beste-

bestehet (§. 3); so geschiehet das **Subtrahiren**/ wenn man von der einen gegebenen Zahl **die Einheiten** der anderen nach und nach wegnimmet.

Anmerckung.

14. Was in der Anmerckung über die vorhergehende Erklärung von dem Addiren (§. 11) erinnert worden/ findet auch hier bey dem Subtrahiren stat.

Die 5. Erklärung.

15. **Multipliciren ist eine Zahl finden aus zwey gegebenen Zahlen/ in welcher die eine gegebene so vielmahl enthalten ist/ als die andere von den gegebenen Eines in sich begreifft.** Die Zahl, so gefunden wird, heisset das **Product**/ oder *FACTUM*: Die gegebenen Zahlen werden die *FACTORES* genennet.

Zusatz.

16. **Multipliciren** ist also nichts anders als eine Zahl etliche mahl zu sich selbst addiren (§. 9).

Die 6. Erklärung.

17. Dividiren **ist eine Zahl finden aus zwey gegebenen Zahlen/ welche andeutet/ wie vielmahl die eine gegebene Zahl in der anderen enthalten ist / und dannenhero** Quotus **oder der** Quotient, **unterweilen auch der** Exponent **genennet wird.**

Der 1. Zusatz.

18. Also ist **dividiren** nichts anders als eine Zahl von einer anderen etliche mahl subtrahiren (§. 12).

Der 2. Zusatz.

19. Und wie viel mahl die eine gegebene Zahl, (wel-

(welche *Divisor* genennet wird) in der anderen, (die man den *Dividendum* nennet) enthalten ist, so vielmahl muß Eines in dem Quotienten enthalten seyn.

Der 1 Grundsatz.

20. Eine jede Zahl und Grösse ist ihr selber gleich.

Anmerckung.

21. Dieser Grundsatz hat seinen Nutzen / weil man eine Zahl ansehen kan / wie sie durch verschiedene Zusammensetzungen oder Veränderungen anderer Zahlen heraus kommet. Z. E. Sechs entstehet / wenn ich 4 und 2 addire; wenn ich 3 durch 2 multiplicire; wenn ich 2 von 8 subtrahire; wenn ich 12 durch 2 dividire. Also sind vermöge unsers Grundsatzes die Summe von 4 und 2 / das Product aus 3 in 2 / die Differentz zwischen 2 und 8 / der Quotient aus 12 und 2 einander gleich.

Der 2. Grundsatz.

22. Wenn zwey Zahlen oder Grössen einer dritten gleich sind / so sind sie einander selber gleich.

Anmerckung.

23. Ich habe z. E. drey Hauffen Geld. In dem ersten sind so viel Thaler als wie in dem anderen; in dem dritten gleichfals so viel als in dem andern. Also muß auch so viel in dem dritten als in dem ersten seyn. Exempel machen die Erklärungen und Grundsätze klar: welches ich einmahl für alle mahl erinnere.

Der 3. Grundsatz.

24. Wenn man gleiches zu gleichem addiret / so kommen gleiche Summen heraus. Wenn man aber gleiches zu dem grösseren und

und zu dem kleineren addiret / so ist die Summe in dem ersten Falle grösser als in dem anderen.

Der 4. Grundsatz.

25. Wenn man gleiches von gleichem subtrahiret / so bleibet gleiches übrig. Wenn man aber gleiches von dem grösseren und kleineren subtrahiret/ so bleibet in dem ersten Falle mehr übrig als in dem anderen.

Der 5. Grundsatz.

26. Wenn man gleiches durch gleiches multipliciret / so kommen gleiche Producte heraus. Wenn man aber das grössere und das kleinere durch gleiches multipliciret; so ist das Product in dem ersten Falle grösser als in dem anderen.

Der 6. Grundsatz.

27. Wenn man gleiches durch gleiches dividiret/so sind die Quotienten einander gleich. Wenn man aber das grössere und das kleinere durch gleiches dividiret; so ist der Quotient in dem ersten Falle grösser als in dem anderen.

Zusatz.

28. Daher wenn zwey ein Exempel rechnen,und keiner von beyden fehlet,muß einerley heraus kommen: so sie aber verschiedenes heraus bringen,muß einer von beyden gefehlet haben.

Der 7. Grundsatz.

29. Was grösser ist als eine von zwey gleichen Grössen/ das ist auch grösser als die andere von denselben.

Der 8. Grundsatz.

30. Das gantze ist seinen Theilen zusammen genommen gleich und also grösser als ein jedes von seinen Theilen.

Der 1. willkührliche Satz.

31. Man gehe im Zehlen nicht weiter fort/ als biß auf Zehen. Wenn man biß Zehen gezehlet/ so fange man wieder von neuem an / nur daß man jederzeit dazu setze/ wie viel mahl man schon Zehen gezehlet.

Anmerckung.

32. Dieses ist das allgemeine Gesetze / darnach man sich im Zehlen richtet: und weil wir desselben von Jugend auf so gewohnet sind/ scheinet es eine Nothwendigkeit zu haben. Die Ursache aber/ warum man nur biß auf Zehen zehlet/ ist sonder Zweiffel daher zu holen / weil die Menschen die Sachen an ihren Fingern zu zehlen pflegen / ehe sie sich im rechnen geübet (§. 11.).

Zusatz.

33. Also hat man vor jede von den zehen Zahlen einen besonderen Nahmen von nöthen, und wiederum andere Nahmen, dadurch die Vielheit der Zehner bemercket wird. Jene sind Eines/ zwey/ drey/ vier/ fünff/ sechs/ sieben/ acht/ neun/ zehen; diese aber zwantzig/ dreyßig/ vier-

zig/ funfftzig/sechtzig/siebentzig/achtzig/ neuntzig/ hundert.

Der 2. willkührliche Satz.

34. Gleichwie man zehen mahl zehen/ hundert nennet; also nenne man ferner zehen mahl hundert Tausend; tausend mahl tausend/ eine Million; tausend mahl tausend Millionen/ eine Billion; tausend mahl tausend Billionen/ eine Trillion oder dreyfache Million/ u. s. w.

Anmerckung.

35. Diese Benennung geschiehet bloß zu dem Ende/ damit man sich in grossen Zahlen nicht verwirret; sondern von jedem Theile derselben einen deutlichen Begriff formiren kan.

Der 3. willkührliche Satz.

36. Die neun Zahlen bemercke man mit folgenden Zeichen: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. damit man aber auch die Zehener / Hunderte/ Tausende/ u. s. w. dadurch andeuten kan/ so gebe man ihnen ihre Bedeutung von der Stelle/ in welcher sie stehen. Nemlich wenn sie entweder allein/ oder in der ersten Stelle zur Rechten anzutreffen sind/ sollen sie Einer bedeuten / in der anderen Zehener/ in der dritten Hunderte / in der vierdten Tausende/ u. s. w. Die leeren Stellen werden mit der Nulle 0 vollgefüllet/ welche nemlich andeutet / daß darinnen keine Zahl anzutreffen.

Die

Die 1. Aufgabe.

37. **Eine geschriebene Zahl auszusprechen/ das ist/einem jeden Zeichen in derselben seinen Werth zuzueignen.**

Auflösung.

1. Theilet die gegebene Zahl in Classen von der Rechten an gegen die Lincke zu vermittelst kleiner Strichlein, und eignet jeder Classe drey Stellen zu. Am Ende gegen die Lincke mögen drey oder wenigere übrig bleiben.
2. Uber die Zahl, welche nach dem andern Strichlein kommet, machet einen Punct und über die, so nach dem vierdten folget, zwey Puncte, u. s. w.
3. Sprechet ein blosses Strichlein durch **Tausend** aus, einen Punct durch **Million** zwey Puncte durch **Billion**/ u. s. w. Hingegen die erste Zahl gegen die Lincke in einer Classe durch **Hunderte**, die mittlere durch **Zehener** und die letzte durch **Einer**: So ist geschehen, was man verlangete. Z. E. wenn ihr folgende Zahl aussprechen wollet,

   2''', 125, 473'', 613, 578', 432', 597.

   so saget: Zwey Trillionen, hundert und fünff und zwantzig tausend, vierhundert und drey und siebentzig Billionen, sechs hundert und dreyzehen tausend, fünff hundert und acht und siebentzig Millionen, vier hundert zwey und dreyßig tausend, fünff hundert und sieben und neuntzig.

Beweiß.

Es ist alles klar aus den vorhergesetzten willkührlichen Sätzen (§. 31. 34. 36).

Die 2. Aufgabe.

38. Verschiedene Zahlen zu addiren.

Auflösung.

1. Schreibet die gegebenen Zahlen dergestalt unter einander, daß die einfache unter den einfachen, die Zehener unter den Zehenern, die Hunderte unter den Hunderten, u. s. w. zu stehen kommen (§. 4).
2. Ziehet unter den geschriebenen Zahlen einen Strich, um die Verwirrung zu vermeiden, und
3. Zehlet besonders zusammen die Einer, und schreibet unter sie ihre Summe. Enthält die etliche Zehener in sich, so zehlet dieselben zugleich mit den gegebenen Zehenern zusammen, und setzet ihre Summe gleichfalls unter die Reihe der Zehener. Wenn ihr so fortfahret, werdet ihr endlich die verlangte Summe aller Zahlen heraus bekomen.

Oder: Streichet in jeder Reihe so vielmahl Zehen weg, als ihr könnet, und zehlet stets so viel Einheiten zu der folgenden, wie viel mahl ihr Zehen weggestrichen: was übrig bleibet, setzet unter den Strich an seinen gehörigen Ort, wie vorhin.

Z. E. wenn ihr folgende Zahlen addiren sollet,

$$\begin{array}{r} 3578 \\ 524 \\ 63 \\ \hline 4165 \end{array}$$

so sprechet: 4 und 3 ist 7, noch 8 darzu ist 15. Setzet 5 unter die **Einer**: den 1. **Zehener** aber zehlet zu den gegebenen **Zehenern** / und sprechet ferner

ner 1 (nemlich Zehener) und 6 sind 7 (Zehener), noch 2 dazu sind 9, noch 7 dazu sind 16 (Zehener). Setzet die 6 Zehener unter die Zehener der gegebenen Zahlen und die übrigen 10. Zehener / das ist 1. Hundert zehlet zu den Hunderten der gegebenen Zahlen 2c.

Beweiß.

Vermöge der geschehenen Rechnung enthält die gefundene Zahl in sich alle Einer / alle Zehener / alle Hunderte / alle Tausende u. s. w. der vorgegebenen Zahlen, das ist, alle ihre Theile. Und also ist sie so groß wie alle gegebene zusammen genommen (§. 30): folgends sind die gegebenen Zahlen zusammen addiret worden. (§. 9). W. Z. E.

Die 1. Anmerckung.

39. Wenn ihr alle Theile der gegebenen Zahlen als lauter Einer ansehet / so werdet ihr wahrnehmen / daß ihr in die Summe nur allzeit den Uberschuß der summirten Zahlen über 9. schreibet. Denn an stat funffzehen schreibet ihr die Zahlen 1 und 5 / welche 6 machen / wenn man sie beyde für Einer hält / und also der Uberschuß der Zahl funffzehen über neune sind. Eben so schreibet ihr an stat sechszehen unter die Reihe der Zehener 6 / und unter die Hunderte 1 / welche beyde Zahlen zusammen genommen 7 ausmachen / wenn man sie für Einer ansiehet / und demnach der Uberschuß von sechszehen über neune sind. u. s. w. Hieraus ist klar / daß man bey Summirung der Zahlen bey jeder Reihe so viel Neunen weglässet als man Einheiten zu der folgenden Reihe zehlet.

Die 2. Anmerckung.

40. Wollet ihr demnach wissen / ob die gefundene Zahl so groß sey wie die gegebenen zusammen genommen / so mercket (1) die besagten Einheiten auf der Seite und

nach vollbrachter Rechnung zehlet sie zusammen / damit ihr sehet / wie vielmahl 9 im Summiren weggelassen worden. (2) Werffet über dieses noch aus der Summe so viel mahl 9 weg / als ihr könnet / und zehlet die in Summiren weggelassenen mit dazu: die Zahl aber / so übrig bleibet / mercket so wohl als die Anzahl der weggeworffenen Neunen. (3) Endlich gebet auch acht / wie viel mahl ihr aus den gegebenen Zahlen 9 wegwerffen könnet / und was zuletzt für eine Zahl übrig bleibet. Denn so die Anzahl der weggeworffenen Neunen beyderseits gleich ist / auch einerley Zahl beyderseits übrig bleibet / so ist die gefundene Zahl so groß / wie die gegebenen zusammen genommen (§. 25) / und ihr seyd daher gewiß / daß ihr nach der Regel richtig verfahren (§. 38). Als in dem vorigen Exempel sind währender Rechnung drey Neunen weggelassen worden / und eine lässet sich noch von der gegebenen Summe wegwerffen / worauf 7 übrig bleiben. Wenn man aber aus den gegebenen Zahlen / die über der Linie stehen / gleichfals 4 mahl 9 ausstreichet / bleiben auch 7 übrig. Demnach ist recht addiret worden. Man kan sich auch der Richtigkeit im Rechnen versichern / wenn man ein Exempel auf verschiedene Art rechnet / entweder auf beyde vorgeschriebene Manieren / oder daß man einmahl von unten hinauf / das andere mahl von oben herunter die Zahlen in einer Reihe zusammen zehlet. Denn einerley Irrthum lässet sich nicht wohl begehen / wenn man auf verschiedene Art rechnet.

Die 3. Anmerckung.

41. Die Mathematici haben ein besonderes Zeichen / dadurch sie die Addition andeuten / nemlich das Zeichen + / welches sie durch mehr aussprechen. Demnach schreiben sie die Summe zweyer Zahlen / als 3 und 7 also: 3 + 7.

Die 4. Anmerckung.

42. In genandten Zahlen streichet man so viele aus / als zusammen ein gantzes von der grösseren Art ausmachen / und setzet davor eines zu der folgenden Reihe / z. E. von den

den Pfennigen streichet man so viel mahl 12 aus / als man kan / und setzet davor jedes mahl 1 zu den Groschen / weil 12 Pfennige einen Groschen machen. Von den Groschen wirffet man auf einmahl 24 weg und schreibet davor 1 zu den Thalern / weil 24 Groschen einen Thaler machen. Und auf eine gleiche Art verfähret man in anderen Fällen. Als:

15 Thl.	20 gl.	10 pf.
28	14	2
30	16	6
75 Thl.	3	6 pf.

Die 3. Aufgabe.

43. **Eine kleinere Zahl von einer grösseren zu subtrahiren.**

Auflösung.

1. Schreibet die kleinere Zahl unter die grössere auf die Art, wie im **Addiren geschehen** (§. 38).
2. Ziehet unter die geschriebenen Zahlen eine Linie.
3. Subtrahiret besonders die **Einer** von den **Einern** / die **Zehener** von den **Zehenern** / die **Hunderte** von den **Hunderten** / u. s. w. und setzet allezeit die Zahl, so übrig bleibet, an ihren gehörigen Ort unter die Linie: nemlich was bey den **Einern** übrig bleibet, unter die **Einer**; was bey den **Zehenern** übrig bleibet, unter die **Zehener** u. s. w.
4. Geschiehet es aber, daß eine grössere Zahl von der kleinern weggenommen werden soll, so nehmet aus der folgenden Reihe eines weg, und setzet es in die vorhergehende, wo es Zehen gilt (§. 36). Also kan von der um **Zehen** vermehrten

 ten

ten Zahl die Subtraction geschehen: die Zahl aber in der folgenden Stelle ist um eines kleiner worden, welches durch einen Punct bemercket wird.

5. Endlich wenn in der folgenden Stelle zur Lincken 0 stehet, gehet so weit fort gegen die Lincke, biß ihr eine Zahl antreffet, und nehmet von derselben 1 weg, so ist es eben so viel als wenn ihr in alle leere Stellen 9 und in die, wo man nicht subtrahiren konte, 10 setzet (§. 36).

Nach diesen Regeln kan man eine jede gegebene Zahl subtrahiren. W. Z. E.

Z. E. Wenn ihr folgende Zahlen von einander subtrahiren sollet,

9 8.0.0.4.0.3 4.5 9
4 7 4 3 8 6 5 2 6 3
―――――――――――
5 0 5 6 5 3 8 1 9 6

so sprechet: 3 von 9 lässet 6, und schreibet 6 unter die Linie in die Stelle der Einer. Sprechet ferner: 6 (nemlich Zehener) von 5 kan ich nicht (wegnehmen). Borget demnach 1 von 4 in der folgenden Stelle, so bleibet in derselben 3 u. ihr habet 15 an stat der 5. Nun nehmet 6 von 15, so bleiben 9 übrig, welche ihr wiederum unter die Linie in die Stelle der Zehener schreibet. Hierauf fahret fort und sprechet: 2 von 3 lässet 1: 5 von 3 kan ich nicht (subtrahiren). Derowegen borge ich 1 von 4 und setze es in die leere Stelle, so habe ich in derselben 10. Davon nehme ich 1 weg, so bleibet in derselben 9 und an stat 3 bekomme ich 13. Nun nehmet

met 5 von 13, so bleiben 8 übrig, und 6 von 9 lässet 3. Weil 8 von 3 wieder nicht angehet, so nehmet 1 von 8 und setzet es in die erste leere Stelle, so habet ihr daselbst 10 und dorten noch 7. Von den 10 nehmet 1 weg, und setzet es in die andere leere Stelle gegen die rechte, so bleiben an stat 10 noch 9, und in dieser habet ihr 10. Davon nehmet wieder 1 weg, so bleiben in derselben noch 9 und an stat 3 bekommet ihr 13. Sprechet nun: 8 von 13 lässet 5; 3 von 9 lässet 6; 4 von 9 lässet 5; 7 von 7 lässet 0; 4 von 9 lässet 5. Wenn ihr nun das übrige allzeit unter die Linie an seinen gehörigen Ort schreibet, so habet ihr die verlangte Zahl gefunden.

Beweiß.

Vermöge der geschehenen Rechnung hält die gefundene Zahl in sich den Rest aller **Einer**/ aller **Zehener**/aller **Hunderte**/aller **Tausende**/u.s.w. das ist, den Rest aller Theile. Da nun der Rest aller Theile zusammen dem gantzen Reste gleich ist (§. 30); so ist die gefundene Zahl der Rest, welcher übrig bleibet, wenn man eine Zahl von der anderen wegnimmet, und folgends mit der weggenommenen Zahl zusammen der anderen gegebenen Zahl gleich. Derowegen geschiehet durch die gegebenen Regeln die **Subtraction** (§. 12). W.Z.E.

Die 1. Anmerckung.

44. Wollet ihr wissen/ ob ihr recht gerechnet/ so addiret nach der 2 Aufgabe (§. 38) die gefundene Zahl zu der kleineren von den gegebenen. Die Summe ist die grössere (§. 12).

98.0.0.4.0.34.59
47438 65263

505 6538196

980040 3459

Die 2. Anmerckung.

45. Das Zeichen der Subtraction ist —/ welches man durch weniger ausspricht: daher schreibet man den Unterscheid zweyer Zahlen/als 8 und 5/ also: 8 — 5/ und spricht ihn aus: 8 weniger 5.

Die 3. Anmerckung.

46. In genandten Zahlen ist die Subtraction von der vorigen nur darinnen unterschieden/ daß die von einer grösseren Art geborgete Zahl nicht 10/ sondern so viel gilt/ als die grössere die kleinere in sich begreiffet/ z. E. 1 von denen Groschen geborget gilt in der Stelle der Pfennige 12; hingegen 1 von den Thalern geborget in der Stelle der Groschen 24; 1 von den Pfunden geborget in der Stelle der Lothe 32/ als:

von	12 Thl.	18 gl.	4 pf.	von	32 Pf.	17 L.
abgezogen	8	20	6		12	24
bleiben	3 Thl.	21 gl.	10 pf.		19 Pf.	25 L.

Die 4. Aufgabe.

47. Das Ein mahl Eins **aufsetzen/ das ist/ ein Täfelein verfertigen/ in welcher alle Producte zu finden/ die heraus kommen/ wenn man die** Einer **durch einander multipliciret.**

Auflösung.

1. Theilet jede Seite eines Quadrats in 9 gleiche Theile und zerschneidet es durch Querstriche in lauter kleine Fächer.

2. Oben

2. Oben in der ersten Reihe derselben und zur Lincken schreibet die Zahlen von 1 biß 9 in ihrer natürlichen Ordnung.
3. Addiret 2 zu sich selbst, und setzet das Product 4 unter die 2: dazu addiret noch 2, so ist 6 das Product aus 3 in 2: zu 6 addiret noch einmahl 2, so habet ihr 8 das Product aus 2 in 4.
4. Wenn ihr nun auf gleiche Weise die übrigen Zahlen findet, und in ihre gehörige Fächer eintraget; so ist das **Ein mahl Eins** fertig, welches man machen solte.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Anmerckung.

48. Das Ein mahl Eins muß man auswendig lernen/ wenn man im multipliciren und dividiren hurtig fortkommen will. So lange man es aber noch nicht inne hat/ muß es jederzeit/ wenn man multipliciret oder dividiret/ bey der Hand seyn.

Die

Die 5. Aufgabe.

49. **Eine gegebene Zahl durch eine andere gegebene Zahl zu multipliciren.**

Auflösung.

1. Schreibet die eine Zahl dergestalt unter die andere, wie in der **Addition** geschehen (§. 38).
2. Unter die geschriebenen Zahlen ziehet eine Linie.
3. Schreibet aus dem **Ein mahl Eins** darunter alle Producte aus jedem Theile der unteren Zahl in jeden von der oberen, und zwar dergestalt, daß ihr allezeit die Zehener von einem Producte zum folgenden Producte zehlet, und jede Reihe der Producte um eine Stelle weiter hinein rücket.
4. Endlich addiret (§. 38) diese Producte zusammen; so ist die Summe derselben das Product, welches man finden solte.

Z. E. Wenn ihr 38476 durch 35 multipliciret, so schreibet die Zahlen folgender gestalt untereinander.

```
  38476
     35
 ------
 192380
115428
-------
1346660
```

und sprechet: 5 mahl 6 ist 30. Schreibet die 0 unter die 5 und sprechet weiter: 5 mahl 7 ist 35, 3 dazu (so euch zuvor überbliebe) ist 38. Schreibet 8 neben 0 gegen die lincke und sprechet ferner: 4 mahl

5 ist

5 ist 20, 3 dazu ist 23. Schreibet 3 neben 8 und saget: 5 mahl 8 ist 40, 2 dazu ist 42. Schreibet 2 neben 3 und saget abermahl: 3 mahl 5 ist 15, 4 dazu ist 19. Schreibet 19 neben 2, so habet ihr die obere Zahl 5 mahl genommen. Verfahret nun auf gleiche Weise mit 3 und saget: 3 mahl 6 ist 18. Schreibet 8 um eine Stelle weiter hinein gegen die Lincke und sprechet ferner: 3 mahl 7 ist 21, 1 dazu ist 22. Schreibet 2 neben die 8 gegen die Lincke, u. s. w. Endlich **addiret** die beyden gefundenen Zahlen, so ist die Summe 134660 das gesuchte Product.

Beweiß.

Vermöge der geschehenen Rechnung und des **Ein mahl Eines** (§. 47) begreiffet die erste Reihe der Zahlen, die addiret werden, die obere Zahl so viel mahl in sich als die erstere von der unteren gegen die Rechte **Eines** in sich enthält. Und weil die folgende Reihe immer um eine Stelle weiter hineingerücket werden, so begreiffet jede von denselben die obere Zahl so vielmahl in sich, als jede von den folgenden der unteren **Eines** in sich enthält (§. 36). Derowegen wenn man alle Reihen zusammen **addiret**; so muß die Summe die obere Zahl so vielmahl in sich enthalten, als die untere **Eines** in sich begreiffet (§. 9). Folglich hat man die obere Zahl durch die untere **multipliciret** (§. 15). W. Z. E.

Anmerckung.

50. Wenn an einer Zahl Nullen hangen / so darf man dieselben nur hinten an das Product der übrigen Zah-

Zahlen an einander anhängen / wie aus beygesetzten Exempeln zu ersehen.

386	4750
200	300
77200	1425000

Sonst ist noch zu mercken / daß das Zeichen der Multiplication ein blosser (.) ist / Z. E. wenn ich bloß andeuten will / daß 3 durch 4 multipliciret werden soll; so schreibe ich 3.4 / welches so viel heisset / als 3 durch 4 multipliciret. Dividiret man (§. 51) das Product durch eine von den gegebenen Zahlen / z. E. 1346660 durch 35 / so kommet die andere Zahl 38476 heraus. Und dieses ist die Probe / ob man recht gerechnet oder nicht (§. 15. 17.)

Die 6. Aufgabe.

51. **Eine gegebene Zahl durch eine andere kleinere Zahl zu dividiren.**

Auflösung.

Der erste Fall. Wenn der Divisor oder Theiler nur ein **Einer** ist, so

1. Setzet ihn unter die erste Zahl zur Lincken, und fraget, wie vielmahl er in derselben enthalten sey. Die Zahl, so solches andeutet, setzet an statt des Quotienten hinter den zur Rechten gemachten Strich.
2. Mit diesem Quotienten **multipliciret** den Divisorem, und ziehet das Product von der Zahl ab, die ihr **dividiret** / streichet dieselbe aus und setzet, was überbleibet, darüber.
3. Rücket den Divisorem um eine Stelle fort, und fraget abermahls, wie vielmahl derselbe in der zur Lincken übergebliebenen und zur Rechten über

der ihm stehenden Zahl zusammen enthalten sey. Und verfahret im übrigen wie vorhin.

Wenn ihr dieses durch alle Zahlen fortführet, so werdet ihr den verlangten Quotienten finden.

Z. E. Man soll 7856 durch 3 dividiren. Setzet 3 unter 7 und sprechet: 3 in 7 habe ich 2 mahl. Schreibet 2 hinter den zur Rechten gemachten Strich, und sprechet ferner: 2 mahl 3 ist 6: 6 von 7 lässet 1. Rücket 3 unter 8 und saget: 3 in 18 habe ich 6 mahl. Setzet 6 zu dem ersten Theile des Quotienten und sprechet: 3 mahl 6 ist 18: 18 von 18 hebet sich auf. Wenn ihr nun auf gleiche Weise fortfahret, so findet ihr den gantzen Quotienten 2618 und bleiben 2 übrig. Daraus zu ersehen, daß die vorgegebene Zahl sich nicht völlig in 3 Theile theilen lässet.

```
1 22
7856 } 2618
3333
```

Beweiß.

Weil man aus dem **Ein mahl Eins** wissen kan, wie vielmahl eine Zahl aus der Classe der **Einer** in einer anderen Zahl enthalten ist, welche aus der **Multiplication** der **Einer** durch einander entstanden (§. 47); so ist klar, daß die gefundene Zahl andeutet, wie vielmahl der Divisor in den **Tausenden/ Hunderten/ Zehenern** und **Einern**/ das ist, in der vorgegebenen Zahl (§. 30), enthalten sey. Derowegen ist sie der gesuchte Quotient und man hat die vorgegebene Zahl durch die andere dividiret (§. 17). W. Z. E.

Der

Der andere Fall. Wenn der Divisor aus mehr als einem Theile bestehet, so

1. Fanget an denselben unter der ersten Zahl zur Lincken, und so fort gegen die Rechte zu schreiben, und machet wie vorhin hinter die Zahl einen Strich, damit der Quotient nicht mit der Zahl, die man dividiren soll, vermenget wird.
2. Untersuchet durch Hülffe des **Ein mahl Eins,** wie viel mahl die erste Zahl des Divisoris in der ersten Zahl der andern, die man dividiren soll, enthalten sey (§. 47).
3. **Multiplicirt** durch diesen Quotienten den gantzen Divisorem und gebet acht, ob sich das Product von den Zahlen, die über ihm stehen abziehen lässet.
4. Wenn es angehet, so schreibet die vorhin gefundene Zahl in die Stelle des Quotienten hinter den Strich, und ziehet das Product würcklich ab. Die Zahlen, von welchen ihr abziehet, streichet aus, und was übrig bleibet, setzet darüber. Gehet es aber nicht an, so nehmet zum Quotienten eines oder auch mehrere weniger, biß ihr das Product abziehen könnet.
5. Rücket euren Divisorem um eine Stelle fort gegen die Rechte und verfahret wie vorhin, biß endlich der Divisor nicht weiter fortgerücket werden kan: so ist geschehen, was man verlangete.
6. Wollet ihr wissen, ob ihr recht gerechnet, so multipliciret den Quotienten durch den Divisorem und addiret dazu, was überblieben ist; so kommet

met die Zahl heraus, die zu dividiren aufgegeben ward.

Z. E. Man soll 7856 durch 32 dividiren. Setzet 32 unter 78 und sprechet: 3 in 7 habe ich 2 mahl. Multipliciret 2 mit 32, so kommet heraus 64. Weil nun dieses Product sich von 78 abziehen lässet; so schreibet 2 an stat des Quotienten, und was nach geschehener **Subtraction** übrig bleibet, 14 schreibet über 78. Rücket euren Divisorem um eine Stelle fort und sprechet: 3 in 14 habe ich 4 mahl. Multipliciret 4 mit 32, so kommet heraus 128. Weil nun dieses Product sich von 145 abziehen lässet; so schreibet 4 in die Stelle des Quotienten, und, was nach geschehener **Subtraction** übrig bleibet, 17 schreibet über die ausgestrichenen Zahlen darüber. Rücket euren Divisorem abermahl um eine Stelle fort und sprechet: 3 in 17 habe ich 5 mahl. **Multipliciret** 32 mit 5. Weil das Product 160 sich von 176 abziehen läst; so schreibet 5 zu dem Quotienten, und, was nach geschehener Subtraction übrig bleibet, 16 schreibet über die ausgestrichenen Zahlen darüber. Die gefundene Zahl 245 ist der verlangte Quotient. Probe:

```
 11
 147
7856 } 245
3222
 33
```

Probe:

```
   245
    32
  ----
   490
  735
  ----
  7840
    16
  ----
  7856
```

Beweiß.

Der Beweiß ist fast eben wie in dem ersten Falle. Nur ist zu mercken, daß, weil man vermöge des **Ein mahl Eins** nicht wissen kan, wie vielmahl der gantze Divisor in den darüber geschriebenen Zahlen enthalten ist, man setze, er stecke so vielmahl darinnen als die erste Zahl des Divisoris zur Lincken in der über ihr geschriebenen Zahl. Denn ob dieses gleich nicht jederzeit eintrifft; so kan es einen doch nicht in Irrthum verleiten, weil die Probe gleich angestellet wird, wenn man den Divisorem durch den angenommenen Quotienten **multipliciret** und ihn also vermittelst derselben so lange um eines vermindert, biß man den rechten Quotienten erhält. Die angegebene Probe ist aus den Erklärungen der Multiplication (§. 15) und Division (§. 17) klar.

Die 7. Erklärung.

52. **Wenn man zwey Zahlen (4 und 12) dergestalt mit einander vergleichet, daß man ihren Unterscheid (8) durch die Sub-**

Subtraction suchet/ nennet man ihre Relation/ die sie gegen einander haben / eine Arithmetische Verhältniß : siehet man aber auf den Quotienten (3), der durch die Division gefunden wird/ eine Geometrische Verhältniß, oder auch schlechterdinges eine Verhältniß. Der Quotient / welcher andeutet/ wie vielmahl die kleinere Zahl in der grösseren enthalten ist heisset der Nahme der Verhältniß (NOMEN sive EXPONENS RATIONIS.)

Die 8. Erklärung.

53. Wenn in zweyen oder mehreren Arithmetischen Verhältnissen (3.5 und 6.8) der Unterscheid der Glieder ; in Geometrischen (3.12 und 5. 20) der Nahme der Verhältniß einerley ist / so nennet man sie ähnlich, und ihre Aehnlichkeit eine Proportion. Die ähnliche Verhältnisse werden auch gleiche Verhältnisse genennet.

Anmerckung.

54. Die Zahlen / so eine Arithmetische Proportion mit einander machen/ schreibet man also/ 3.5 : . 6.8/ oder besser nach meiner Art 3 — 5 ⩦ 6 — 8 ; die in einer Geometrischen neben einander stehen / dergestalt 3.12 : : 5. 20 oder besser mit dem Hrn. von Leibnitz 3 : 12 ⩦ 5 : 20. In beyden spricht man : Wie sich verhält die erste Zahl zu der anderen / so die dritte zu der vierdten. Diese Redens-Art hat in dem ersten Falle den Verstand : Um wie viel die erste Zahl grösser oder kleiner ist als die andere / um eben so viel ist die dritte Zahl grösser oder kleiner als die vierdte. Hingegen

gen in dem anderen Falle muß man sie dergestalt erklären: Wie vielmahl die erste Zahl die andere in sich enthält/ oder in derselben enthalten ist; eben so vielmahl enthält die dritte Zahl die vierdte in sich/ oder ist in derselben enthalten.

Die 9. Erklärung.

55. Zuweilen vertritt das andere Glied zugleich die Stelle des dritten/ und dann nennet man es PROPORTIONEM CONTINUAM. Ist nun dieselbe Arithmetisch/ so schreibet man sie also: ∸ 3. 6. 9. oder auch $3-6=6-9$; ist sie Geometrisch/ folgender massen; ∺ 3. 6. 12/ oder auch $3:6=6:12$.

Die 10. Erklärung.

56. Eine Progreßion wird genennet eine Reihe Zahlen/die in einer Arithmetischen/ oder auch Geometrischen Verhältniß fortgehen/ als im ersten Falle 3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27: im anderen 3. 6. 12. 24. 48. 96. Und zwar nennet man die erste eine Arithmetische; die andere aber eine Geometrische Progreßion.

Der 9. Grundsatz.

57. Wenn zwey Verhältnisse einer dritten gleich sind/ so sind sie einander selber gleich. Z. E. $1:4=3:12$ und $1:4=5:20$. Derowegen ist $3:12=5:20$.

Der 1. Lehrsatz.

58. Wenn man zwey Zahlen (3 und 6) durch eine Zahl (4) multipliciret; so verhal-

halten sich die Producte (12 und 24) wie die multiplicirten Zahlen (3 und 6).

Beweiß.

Denn wenn ich eine Zahl (4) durch zwey andere (3 und 6) multiplicire, so ist dieselbe in dem anderen Producte um so vielmahl mehr enthalten, als in dem ersten, als die erste Zahl (3) in der anderen (6) enthalten ist (§. 15). Als weil in unserem Exempel 6 zweymahl so groß ist als 3; so nehme ich auch 4 zweymahl so viel, wenn ich durch 6 multiplicire, als wenn ich durch 3 multiplicire, massen das dreyfache zweymahl genommen das sechsfache ausmachet. Nemlich im ersten Falle nehme ich 4 dreymahl; im andern Falle zweymahl dreymahl. Derowegen ist klar, daß das erstere Product (12) in dem anderen (24) so vielmahl enthalten ist, als die erste multiplicirte Zahl (3) in der anderen (6), als in dem gantzen Exempel zweymahl. W. Z. E.

Zusatz.

59. Wenn man zwey Zahlen durch eine dritte dividiret, so müssen die Quotienten sich verhalten wie die dividirten Zahlen: denn man kan sie ansehen, als wären sie durch Multiplication der Quotienten mit dem Divisore entstanden (§. 15. 17).

Die 11. Erklärung.

60. Wenn man ein gantzes in gleiche Theile genau eintheilet und nimmet einen oder etliche Theile derselben / so nennet man es einen Bruch.

Der 4. willkührliche Satz.

61. **Man schreibet ihn aber mit zwey Zahlen / so unter einander gesetzet und durch einen Strich von einander unterschieden werden/von denen die untere andeutet/in wie viel gleiche Theile das Gantze eingetheilet worden; die obere aber/ wie viel solcher Theile mir zugehören. Jene wird** der Nenner; **diese** der Zehler **genennet.** Z. E. der Thaler soll in 3 gleiche Theile getheilet werden und ich soll 2 derselben bekommen, so schreibe ich den Bruch also: $\frac{2}{3}$.

Der 1. Zusatz.

62. Daher urtheilet man die Grösse des Bruches aus der Verhältniß des **Zehlers** zu dem **Nenner.** Denn stecket jener in diesem vielmahl, so ist der Bruch klein, als $\frac{3}{37}$; stecket er wenig mahl darinnen, so ist er groß, als $\frac{2}{3}$. Hingegen wenn die **Zehler** in ihren **Nennern** gleich viel mahl enthalten sind, so sind die Brüche einander gleich, als $\frac{3}{6}$. $\frac{4}{8}$. $\frac{5}{10}$. $\frac{25}{50}$. Und daher ist mehr als ein gantzes, wenn der Zehler grösser als der Nenner, als $\frac{35}{24}$. Denn $\frac{24}{24}$ ist ein gantzes und also habe ich $\frac{11}{24}$ über ein gantzes.

Der 2. Zusatz.

63. Wenn man demnach den **Nenner** und **Zehler** eines Bruchs ($\frac{4}{6}$) durch eine Zahl (2) multipliciret oder dividiret; so sind die Brüche, so

so heraus kommen ($\frac{8}{12}$ und $\frac{2}{3}$) dem gegebenen ($\frac{4}{6}$) gleich (§. 58. 59).

Die 7. Aufgabe.

64. **Einen Bruch aufzuheben / das ist / an stat eines gegebenen Bruches ($\frac{20}{48}$) einen anderen zu finden / der mit kleineren Zahlen geschrieben wird / aber dem gegebenen dem Werthe nach gleich ist.**

Auflösung.

Dividiret den Nenner (48) und den Zehler (20) des gegebenen Bruches ($\frac{20}{48}$) durch eine Zahl (4), so formiren (§. 63) die herauskommenden Zahlen (12 und 5) den neuen Bruch ($\frac{5}{12}$).

Die 8. Aufgabe.

65. **Verschiedene Brüche unter einerley Benennung zu bringen / das ist / an stat einiger Brüche/die verschiedene Nenner haben / andere zu finden / die einerley Nenner haben und den gegebenen gleich sind.**

Auflösung.

1. Wenn 2 Brüche gegeben sind, so multipliciret jeden Bruch durch den Nenner des anderen.
2. Sind aber mehrere gegeben, so wird der Zehler und Nenner eines jeden Bruches durch das Product aus den Nennern der übrigen multipliciret (§. 63).

Exempel.

$5)\frac{2}{3}\ 3)\frac{4}{5}=\frac{10}{15}.\ \frac{12}{15}$

$24)\ \frac{2}{3}.\ 12)\ \frac{1}{6}.\ 18)\frac{3}{4}=\frac{48}{72}.\ \frac{12}{72}.\ \frac{54}{72}.$

Die 9. Aufgabe.

66. **Brüche zu addiren.**

Auflösung und Beweiß.

Weil die Nenner die Nahmen sind (§. 61) so dörffet ihr nur die Zehler **addiren.** Da man aber nur Zahlen von einer Art zusammen setzen kan (§. 4) so müsset ihr erst die Brüche unter eine Benennung bringen (§. 65), wenn sie verschiedene Nenner haben.

Exempel.

$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{10}{15}+\frac{12}{15}=\frac{22}{15}=1\frac{7}{15}$ (§. 62).

$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{3}{4}=\frac{48}{72}+\frac{12}{72}+\frac{54}{72}+\frac{114}{72}=1\frac{42}{72}$
$=1\frac{7}{12}$ (§. 62. 64).

Die 10. Aufgabe.

67. **Einen Bruch von dem anderen zu subtrahiren.**

Auflösung.

1. Bringet die Brüche unter eine Benennung (§. 65), wenn sie verschiedene Nenner haben.
2. **Subtrahiret** den Zehler des einen von dem Zehler des anderen und lasset den Nenner unverändert

Z. E. $\frac{2}{3}-\frac{3}{7}=\frac{14}{21}-\frac{9}{21}=\frac{5}{21}.$

Beweiß.

Der Beweiß ist wie in der vorhergehenden Aufgabe.

Die

Die 11. Aufgabe.

68. **Einen Bruch durch einen Bruch zu multipliciren.**

Auflösung.

Multipliciret durch einander die Nenner, ingleichen die Zehler; so formiren die beyden Producte das verlangte facit.

Z. E. $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ und $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{35}$.

Beweiß.

Wenn man einen Bruch durch einen Bruch **multipliciren** soll, so soll man ein Stücke von demselben geben (§. 15. 60). Z. E. $\frac{4}{5}$ durch $\frac{3}{7}$ multipliciren ist eben so viel als $\frac{4}{5}$ in 7 Theile eintheilen und 3 solcher Theile davon nehmen (§. 61), das ist, $\frac{4}{5}$ durch 7 dividiren und den Quotienten durch 3 multipliciren. Weil nun der Nenner der blosse Nahme ist (§. cit.); so muß eigentlich der Zehler des zu multiplicirenden Bruches durch den Nenner des andern dividiret werden, als der Zehler 4 des Bruches $\frac{4}{5}$ durch den Nenner 7 des Bruches $\frac{3}{7}$. Damit er sich nun dividiren lässet, so muß der zu multiplicirende Bruch in einen andern verwandelt werden: welches geschiehet, wenn man ihn durch den Nenner des Multiplicanten 7 multipliciret (§. 63), damit man $\frac{28}{35}$ an stat $\frac{4}{5}$ erhält. Der siebende Theil hiervon ist $\frac{4}{35}$. Wenn man nun diesen Bruch 3 mahl nimmet; so bekommet man $\frac{12}{35}$. Da es aber eine vergebli-

che Arbeit wäre, wenn man den Zehler 4 erst durch den Nenner 7 multipliciren und darnach das Product wieder dadurch dividiren solte; so multipliciret man bloß den Nenner 5 durch 7 und gleich den Zehler 4 durch 3. W. Z. E.

Die 1. Anmerckung.

69. Es ist dannenhero nicht Wunder/daß in der Multiplication immer weniger heraus kommet als ein jeder von den Brüchen/ die man durch einander multipliciret/ indem es in der That eine Division ist. Denn wenn ich z. E. mit $\frac{1}{2}$ multiplicire/ so nehme ich ein halb mahl/ was ich multipliciren soll/ und also wird es in der That in zwey Theile getheilet/ und ich bekomme einen davon.

Die 2. Anmerckung.

70. Wenn man einen Bruch durch eine gantze Zahl multipliciren soll/ so ist nicht nöthig erst zu erinnern/ daß man nur den Zehler multipliciren darf/ indem der Nenner nur der Nahme ist (§. 61). Z. E. $\frac{3}{7}$ mit 2 multipliciret/ bringen $\frac{6}{7}$. Und so haben wir es auch in dem Beweise gemacht.

Die 12. Aufgabe.

71. Einen Bruch ($\frac{1}{5}$) durch einen anderen $\frac{2}{3}$ zu dividiren.

Auflösung.

1. Kehret den Bruch, durch den man dividiren soll, um, z. E. an stat $\frac{2}{3}$ schreibet $\frac{3}{2}$.
2. **Multipliciret** hierauf wie in der vorhergehenden Aufgabe (§. 68); so kommet der Quotient $\frac{12}{10} = 1\frac{2}{10}$ (§. 62) $= 1\frac{1}{5}$ (§. 64) heraus.

Be-

Beweiß.

Wenn man einen Bruch durch einen anderen dividiret, so fraget man, wie vielmahl der eine in dem anderen enthalten sey (§. 17). Wenn man nun die Brüche zu gleichen Nennern bringet, so muß einer so vielmahl in dem anderen enthalten seyn als der Zehler des einen in dem Zehler des anderen, weil in dieser Vergleichung der gemeine Nenner als der gemeine Nahme derer Dinge, die gezehlet werden, nicht anzusehen (§. 61). Allein indem zwey Brüche zu einer Benennung gebracht werden, erwächset der Zehler des ersten, wenn man seinen Zehler durch den Nenner des anderen **multipliciret**; hingegen der Zehler des anderen, wenn man seinen Zehler durch den Nenner des ersten **multipliciret** (§. 65). Also bekommet man die beyden Zahlen, so durch einander zu dividiren sind, wenn man den Divisorem umkehret und hernach die Brüche in einander multipliciret. W. Z. E.

Die 12. Erklärung.

72. **Wenn man eine Zahl** (2) **durch sich selbst multipliciret, so nennet man das Product** (4) das Quadrat. **derselben Zahl; Sie aber** die Quadrat-Wurtzel **in Ansehung dieses Quadrates.**

Die 13. Erklärung.

73. **Multipliciret man die Quadrat-Zahl** (4) **ferner durch ihre Wurtzel** (2): **so heisset das neue Product** (8) eine Cubic-Zahl

Zahl und in Ansehung derselben die Wurzel (2) nunmehro die Cubic-Wurtzel.

Die 14. Erklärung.

74. Die Quadrat-Wurtzel aus einer gegebenen Zahl ausziehen, ist diejenige Zahl finden/die durch sich selbst multipliciret die gegebene Zahl hervor bringet.

Die 15. Erklärung.

75. Hingegen die Cubic-Wurtzel aus einer gegebenen Zahl ausziehen, heisset diejenige Zahl finden / die durch ihre Quadrat-Zahl multipliciret die gegebene Zahl hervor bringet.

Anmerckung.

76. Wenn man die Quadrat- und Cubic-Wurtzel ausziehen wil/ muß man die Quadrat- und Cubic-Zahlen aller Zahlen von 1 biß 9 wissen. Darzu dienet folgendes Täfelein.

Wurtzeln.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrat.	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cub. Zahl.	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Die 13. Aufgabe.

77. Aus einer gegebenen Zahl die Quadrat-Wurtzel auszuziehen.

Auflösung.

1. Theilet die gegebene Zahl in Classen von der Rechten gegen die Lincke zu, und gebet jeder

zwey

Zwey Ziffern: denn so viel Theile hat die Wurtzel als Classen heraus kommen. In der letzten Classe aber zur Lincken kan auch eine Ziffer stehen.

2. Suchet in dem **Wurtzel-Täfelein**, (§. 76) das Quadrat auf, welches der Zahl in der ersten Classe am nächsten kommet, und ziehet es von derselben ab. Die dazu gehörige **Wurtzel** aber setzet in die Stelle des Quotienten.

3. Hierauf dupliret den gefundenen Quotienten und schreibet das Product unter die lincke Zahl der folgenden Classe, und weiter fort zurücke gegen die Lincke, wenn es aus viel Ziffern bestehet: dividiret auf gewöhnliche Weise, und setzet den Quotienten an gehörigen Ort, so habt ihr den andern Theil der Wurtzel.

4. Eben diesen Quotienten setzet unter die rechte Zahl derselben Classe, und denn multipliciret mit dem gefundenen Quotienten die unterschriebenen Zahlen, und ziehet das Product von den oberen Zahlen des Quadrates ab.

5. Wenn ihr nun die dritte und vierdte Regel bey allen Classen anbringet, so kommet die verlangte Quadrat-Wurtzel heraus.

6. Wenn ihr aber die Wurtzel durch sich selbst multipliciret, so kommet die gegebene Quadrat-Zahl wieder heraus. Und dieses ist die Probe, daraus ihr sehet, ob ihr recht gerechnet, oder nicht (§. 74).

1|79|56 (134	Probe: 134
1| :: ::	134
79 ::	536
23 ::	402
69 ::	134
10|56	17956
2|64	
10 56	
0	

Anmerckung.

78. Wenn die vorgegebene Zahl kein vollkommenes Quadrat ist / so kan man 10 Theilichen / 100 Theilichen u. s. w. haben / wenn man 2 / 4 u. s. w. Nullen hinten anhänget / und die Rechnung fortsetzet. Denn wenn man die Einheit in der Quadrat-Zahl in 100 gleiche Theile theilet (welches geschiehet / wenn man sie durch 100 multiplicirет) so wird die Wurtzel in zehen Theile getheilet (§. 72) / z. E. wenn man aus 345 die Wurtzel ziehen soll / geschiehet solches folgender massen:

3|45

```
3|45 (18 57/100
1|: :
---------
2|45
  28
 224
-------------
  2.1.|0.0
     365
   1825
-------------
    27.5|0.0
       3707
    25949
--------------
       1551
```

Will man die Probe anstellen / ob man recht gerechnet; so multipliciret man die gefundene Zahl durch sich selbst und addiret zu dem Producte/ was noch übrig geblieben war. Wenn nun die vorgegebene Zahl mit so viel Nullen/ als man angehänget/ heraus kommet; so ist die Rechnung richtig (§. 74). Z. E.

```
     1857
     1857
   ---------
    12999
    9285
  14856
  1857
  ----------
  3448449
     1551
  ----------
  3450000
```

Die

Die 14. Aufgabe.

79. Aus einer gegebenen Zahl die Cubic-Wurtzel auszuziehen.

Auflösung.

1. Theilet die gegebene Zahl in Classen von der Rechten gegen die Lincke, und gebet jeder Classe drey Zahlen. Denn so viel Theile hat die Wurtzel als Classen heraus kommen.
2. Suchet in dem Wurtzel-Täfelein (§. 76) die Cubic-Zahl, welche derjenigen, so in der letzten Classe zur Lincken stehet, am nächsten kommet: ziehet dieselbe davon ab, und setzet die dazu gehörige Wurtzel in die Stelle des Quotienten. Solchergestalt habet ihr den ersten Theil der Wurtzel.
3. Diesen multipliciret mit sich selbst, und das herauskommende Quadrat mit drey, setzet das Product unter die Cubic-Zahl an stat des Divisoris, dergestalt, daß dessen letzte Zahl zur Rechten unter die erste zur Lincken in der folgenden Classe zu stehen kommet, und dividiret gewöhnlicher massen: so kommet der andere Theil der Wurtzel heraus.
4. Alsdenn multipliciret den Divisorem in den neuen Quotienten und schreibet das Product darunter: unter der mittleren Zahl derselben Classe fahet an von der Rechten gegen die Lincke zu schreiben das Product von dem Quadrate des neuen Quotienten dreymahl genommen in den vorhergehenden: und endlich unter der dritten die Cubic-Zahl des neuen Quotienten.

ten. Addiret diese drey Producte, und ziehet die Summe ab von den in der gegebenen Zahl noch übrigen Ziffern.

Wenn man nun nach der dritten und vierdten Regel bey den übrigen Classen fortfähret, so kommet endlich die verlangte Cubic-Wurtzel heraus.

```
                          47|437|928  (362
                          27|:::  :::
                    ------------------
                         2.0|437  :::
            Divisor (27)  ::      :::
Fact. ex Div. in N. Q.  162 ::    :::
— ex tr. □ N. Q. in P.  324 :     :::
Cubus Novi Quoti          216     :::
                    -----------
Sum. Factorum          19656      :::
                    -----------
                            781|928
            Divisor        (388 8)::
Fact. ex Div. in N. Q.      777 6::
— ex tr. □ N. Q. in P.         4 32:
Cubus novi Quoti                  8
                    -------------------
Sum. Factorum               781 928
                    -------------------
                            000 000
```

Anmerckung.

80. Wenn man die Einheit in der Cubic-Zahl in 1000 gleiche Theile theilet (welches geschiehet, wenn man sie durch 1000 multipliciret); so wird die Wurtzel in zehen Theile getheilet (§. 73). Dannenhero wenn eine gegebene Zahl keine vollkommene Cubic-Zahl ist, darf man nur 3 Nullen für die zehen Theilichen, noch drey für die hundert Theilichen u. s. w. anhängen, und die

Rechnung nach der ordentlichen Regel fortsetzen. Z. E. es sey aus 3 die Cubic-Wurzel zu ziehen.

```
3|000|000 (1 44/100
1|: : :
-------------
 2.0.0.0
 (3) : :
 12 : :
   48 :
    64
-------------
 1744
-------------
   256.|0.0.0.
   (588) : :
  2352 : :
     672 :
       64
-------------
   241984
-------------
     14016
```

Will man wissen / ob man recht gerechnet oder nicht; so muß man die gefundene Zahl in sich selbst und das herauskommende Product noch einmahl in dieselbe multipliciren und / was in der Rechnung übrig geblieben / dazu addiren. Denn wenn die vorgegebene Zahl mit so viel Nullen herauskommet / als man angehänget / so ist die Rechnung richtig (§. 75).

Pro-

Probe:

```
        144 Wurtzel.
        144
       ----
        576
       576
      144
      -----
      20736 Quadrat-Zahl.
        144
      ------
      82944
     82944
    20736
    -------
    2985984
      14016
    -------
    3000000 Cubic-Zahl.
```

Der 2. Lehrsatz.

81. **In einer Geometrischen Proportion ist das Product des ersten Gliedes in das vierdte gleich dem Product aus dem anderen in das dritte.**

3 . 6 : : 4 . 8 12 - 48 - 1 - 4

$$\frac{\begin{array}{c}3 \cdot 6 :: 4 \cdot 8\\ 4 \quad\quad\quad 3\end{array}}{24 = 24}$$

Beweiß.

Das andere Glied entstehet, wenn man das erste, und das vierdte, wann man das dritte durch den Nahmen der Verhältniß multipliciret (§. 53). Derowegen wenn man das erste Glied durch das vierdte multipliciret, so ist das Product aus dem ersten und dritten Gliede, und dem Nahmen der

Verhältniß erwachsen. Multipliciret man das andere Glied durch das dritte, so ist das Product gleichfals aus dem ersten und dritten Gliede und dem Nahmen der Verhältniß erwachsen. Derowegen müssen die beyden Producte gleich seyn (§. 26). W. Z. E.

Zusatz.

82. Wenn demnach drey Zahlen proportional sind, daß die mittlere zwey Stellen vertritt (§. 55): so ist das Product aus den beyden äussersten der Quadrat-Zahl der mittleren gleich (§. 72).

Der 3. Lehrsatz.

83. **Wenn vier Zahlen oder Grössen proportional sind/ so verhält sich auch Wechselsweise wie die erste zu der dritten/ so die andere zu der vierdten**

Beweiß.

Das andere Glied kommet heraus, wenn man das erste durch den Exponenten multipliciret; das vierdte aber, wenn man das dritte durch eben denselben Exponenten multipliciret (§. 53). Derowegen verhält sich das andere Glied zu dem vierdten wie das erste zu dem dritten (§. 58). W. Z. E.

Die 15. Aufgabe.

84. **Zwischen zwey gegebenen Zahlen die mittlere Geometrische Proportional-Zahl zu finden.**

Auflösung.

1. Multipliciret die beyden gegebenen Zahlen (8 und 72) durch einander.

2. Aus

2. Aus dem Product (576) ziehet die Quadrat-Wurtzel (24) (§. 77); so habet ihr die verlangte Zahl (§. 82).

Die 16. Aufgabe.

85. **Zu drey gegebenen Zahlen (3/12/5) die vierdte/ oder auch zu zweyen die dritte Geometrische Proportional-Zahl zu finden.**

Auflösung.

1. Multipliciret die andere (12) durch die dritte (5), oder in dem anderen Falle die andere durch sich selbst.
2. Das Product (60) dividiret durch die erste (3), so ist der Quotient (20) die vierdte (§. 81), oder in dem anderen Falle die dritte (§. 82).

Die 1. Anmerckung.

86. Die Auflösung dieser Aufgabe nennet man insgemein die **Regel Detri** / weil aus drey Zahlen die vierdte gefunden wird. Und hat dieselbe einen unaussprechlichen Nutzen/ so wohl in dem gemeinen Leben/ als in allen Wissenschafften. Es ist aber aus der Aufgabe leicht zu ersehen/ daß man die Regel Detri nirgend anbringen kan/ als wo man vorher aus der Beschaffenheit der Sachen versichert ist/ daß eine Geometrische Proportion unter ihnen anzutreffen. Z. E. Es ist ein grosses Gefässe mit Wasser angefüllet: unten an dem Boden ein enges Löchlein/ dadurch es heraus lauffen kan. Man hat befunden/ daß in 2 Minuten 3 Kannen heraus gelauffen. Die Frage ist/ wenn 200 Kannen heraus lauffen werden. Hier sind drey Zahlen gegeben: die vierdte soll man finden. Allein es ist bekandt/ daß das Wasser anfangs geschwinde/ hernach langsam lauffet/ und also die Zahl der ausgelauffenen Kannen der Zeit/ in wel-

cher sie heraus lauffen/ keinesweges proportional ist. Derowegen kan man auch diese Frage durch die Regel Detri nicht auflösen.

Die 2. Anmerckung.

87. Allein im Handel ist der Werth der Waare jederzeit ihrer Grösse gleich. Denn wenn einer zweymahl so viel nimmet/ zahlet er doppelt; nimmet er dreymahl so viel als ein anderer/ so zahlet er dreyfach Geld. Daher kan man aus dem gegebenen Werthe von einer gewissen Grösse einer Waare den Werth einer anderen Grösse/ oder auch die Grösse der Waare von einem gegebenen Werthe finden. Z. E. 3 Pf. kommen 4 Thlr. wie viel kommen 17 Pf.; Hier ist klar/ wie vielmahl 3 Pf. in 17. Pf enthalten sind/ eben so vielmahl die 4 Thlr. als der Werth der 3 Pf. in dem Werthe der 17 Pf. enthalten seyn müssen/ den ich suche / und nach der Regel Detri also finde:

3 Pf. — 17 Pf. — 4 Thlr.

$$\frac{4}{68} \qquad \left.\begin{matrix} 2 \\ 68 \\ 33 \end{matrix}\right\} 22\tfrac{2}{3} \text{ Thlr.}$$

Oder: für 4 Thlr. bekommet man 3 Pf. / wie viel wird man vor $22\frac{2}{3}$ Thlr. bekommen. Hier ist abermahl klar/ daß/ wie viel mahl der Werth von 3 Pf. nemlich 4 Thlr. in dem Werthe der gesuchten Pf. nemlich $22\frac{2}{3}$ Thlr. enthalten/ eben so vielmahl die 3 Pf. in den gesuchten Pf. enthalten seyn müssen/ die man durch die Regel Detri solchergestalt findet.

4 Thlr.

4 Thlr. — $22\frac{2}{3}$ Thlr. — 3 Pf.

3

68   2
68 } 17. Pf.
44

Woraus zugleich zu ersehen / wie man in der Regel Detri die Probe anstellen kan / ob man recht gerechnet oder nicht.

Die 3. Anmerckung.

88. Eben so verhält sich der Lohn der Arbeiter / wie die Zahl der Zeiten / in welchen sie gearbeitet / wenn man auf Tage oder Stunden mit ihnen gedungen. Jngleichen die Grösse der verrichteten Arbeit ist der Zeit proportional / wenn man eine Stunde so viel arbeitet als die andere; ingleichen der Zahl der Arbeiter / wenn einer so viel arbeitet als der andere / u. s. w. Z. E. in einer Stunde lieset einer 6 Blätter in einem Buche. Die Frage ist / in wie viel Stunden er 360 Blätter lesen wird? Die verlangte Zahl findet man nach der Regel Detri also:

6 Bl. — 360 Bl. — 1 St.

1

360
66 } 60 St.

Die 4. Anmerckung.

89. Unterweilen geschiehet es / daß zwischen den Zahlen keine solche Proportion zu finden / dergleichen zwischen den Sachen / die gezehlet werden / anzutreffen / wenn nemlich nicht alle Zahlen von einerley Art sind. Da denn nöthig ist / daß sie zu einerley Art gebracht werden / ehe man die Regel Detri anbringen kan / als wenn man die Thaler in Groschen / die Groschen in Pfennige / die Pfunde in Lothe / die Stunden in Minuten / u. s. w. verwandelt.

Z. E. 3 Pf. und 4 L. kosten 2 Thlr. 4 gr. was kommen 2 Pf.? Die Rechnung geschiehet also:

3 Pf. 4 L. — 2 Pf. — 2 Thlr. 4 gr.

32	32	24
100 L. —	64 L. —	52 gr.

52

128
320

3328

$\frac{3328}{100}$ } $33\frac{28}{100}$ gr. oder $33\frac{7}{25}$ gr. §. 64.

Die 5. Anmerckung.

90. Es geschiehet meistentheils / daß die übrigen Brüche eine gantz andere Eintheilung des Gantzen erfordern/ als insgemein gebräuchlich. Als in dem vorhergehenden Exempel soll der Groschen in 25 Theile getheilet werden; wir aber theilen ihn in 12 ein. Derowegen muß man einen anderen Bruch finden/ der so viel gilt wie der gegebene $\frac{7}{25}$ und zum Nenner 12 hat. Da nun der gesuchte Zehler des Bruches in 12 so viel mahl enthalten seyn muß/ als der gegebene Zehler 7 in seinem Nenner 25 (§. 61); so kan auch diese Verwandelung durch die Regel Detri folgender gestalt geschehen (§. 85).

25 — 7 — 12

7

84

$\frac{84}{25}$ } $3\frac{9}{25}$ Pf.

Weil der Pfennig nicht weiter eingetheilet wird / so muß man die $\frac{9}{25}$, welche etwas mehr als $\frac{1}{3}$ von einem Pfennige sind/ weglassen: sonst könte man ihren Werth gleichfals nach der Regel Detri finden.

Die

Die 6. Anmerckung.

91. Man findet in den Arithmetischen Schrifften auch eine verkehrte Regel Detri/ die man aber nicht nöthig hat/ wenn man die Zahlen dergestalt neben einander setzet/ wie es die Proportion erfordert. Z. E. 125 Soldaten werden mit einem Festungs-Bau innerhalb 6 Monaten fertig. Es ist aber die Frage wie viel Soldaten muß man haben/ daß der Bau innerhalb 2 Monaten fertig wird? Hier ist klar/ daß/ wie viel mahl 2 Monate in 6 Monaten enthalten sind/ eben so vielmahl die Zahl der Soldaten/ welche 6 Monate mit der Arbeit zubringen/ in der Zahl derer enthalten sey/ welche in 2 Monaten fertig werden soll. Denn je geschwinder die Arbeit fortgehen soll/ je mehr Soldaten muß man dazu haben. Die Rechnung geschiehet demnach also:

2 M. — 6 M. — 125 S.
6
———
750

11
750 } 375 Sold.
222

Die 7. Anmerckung.

92. Unterweilen muß man die Regel Detri zweymahl anbringen/ ehe man die verlangte Zahl finden kan: Woraus einige ohne Noth eine besondere Regel gemacht und sie die Regel de quinque, ingleichen Regulam compositam genennet. Z. E. 300 Thl. bringen in 2 Jahren 36 Thl. Interesse/ wie viel tragen 20000 Thl. in 12 Jahren? Hier suchet man erstlich durch die Regel Detri/ wie viel 20000 Thl. in 2 Jahren bringen; darnach durch eben dieselbe/ wie viel sie in 12 Jahren tragen/ folgender gestalt:

300 Thl. — 20000 Thl. — 36 Inter.

36

720000

2

~~720000~~ } 2400 Thl.
~~333300~~

2 J. — 12 J. — 2400 Thl.

12

~~28800~~ } 14400 Thl.   4800
~~22222~~

24

28800

Die 8. Anmerckung.

93. Es lassen sich dergleichen Exempel auch durch eine einige Anwendung der Regel Detri rechnen. Denn weil 2 mahl 300 Thl. so viel in einem Jahre Interesse bringen als 300 in zweyen/ und 12 mahl 20000 in einem Jahre so viel geben als 20000 in 12 Jahren; so darf ich nur die Umstände der Zeit weglassen und sagen: 2 mahl 300 das ist 600 Thl. geben (nemlich in einem Jahre) 36 Thl. Interesse/ was geben 12 mahl 20000 das ist 240000 Thl. (nemlich wiederum in einem Jahre)?

300 Thl. 2 J. — 20000 Thl. 12. — 36 Inter.

2 ... 12

600 ... 240000

36

1440000

72 ... 22

8640000 ... ~~8640000~~ } 14400 Thl.
~~6666600~~

Und

Und diese letzte Manier ist rathsamer als die erste / weil in der ersten öffters verdrüßliche Brüche vorkommen.

Die 9. Anmerckung.

94. Bey einigen Exempeln muß man die Regel De-tri nothwendig etliche mahl anbringen / als in den Gesellschaffts-Rechnungen so viel mahl / als Personen sind / die an dem Gewinn oder Verlust in der Handlung Antheil haben. Denn weil derjenige doppelt Geld gewinnet und verlieret / der doppelte Zulage giebet / u. s. w. so verhält sich jederzeit die gantze Zulage zu eines jeden Zulage insbesondere / wie der gantze Gewinn oder Verlust zu eines jeden Gewinn oder Verlust insbesondere. Z. E. es haben drey Personen in einer Handlung 2000 Thl. gewonnen. Der erste hat gegeben 1000 Thl. Der andere 500 Thl. Der dritte 300 Thl. Man soll finden / wie viel jedem von dem Gewinn gebühre? Dieses geschiebet folgender gestalt:

Zulage des ersten 1000 Thl.
des andern 500 —
des dritten 300 —

Gantze Zulage 1800

1800 Thl. — 1000 Thl. — 2000 Thl.
2 000
2000000

111
12222
2000000 } $1111\frac{2}{18}$ Thl. Gewinn des ersten.
1888800
111

1800 Thl. — 500 Thl. — 2000 Thl.
2 000
1000000

111
555
1000000 } $555\frac{10}{18}$ Thl. Gewinn des anderen.
188800
11

1800 Thl. — 300 Thl. — 2000
2000

600000

33
3666
600000 } $333\frac{6}{18}$ Thl. Gewinn des dritten.
188800
11

Probe.

$1111\frac{2}{18}$ Gewinn des ersten.
$555\frac{10}{18}$ Gewinn des anderen.
$333\frac{6}{18}$ Gewinn des dritten.

2000 Thl. gantzer Gewinn.

Die 10. Anmerckung.

95. Es giebet auch viel andere Exempel/ die auf eine gleiche Weise gerechnet werden. Als wenn man nicht allein in der Medicin/ sondern auch in anderen Künsten und Wissenschafften das Gewichte der Ingredientien weiß/ die man mit einander in Zubereitung eines Dinges vermischen soll und man will wissen/ wie viel von jedem zu nehmen ist/ damit das Vermischte ein verlangtes Gewicht habe. Z. E. eine Medicin hat 3 Ingredientien/ von dem einen kommen dazu 4 Loth/ von dem anderen 5 Loth/ von dem dritten 2 Loth. Die Frage ist/ wie viel man

man von jedem nehmen muß / daß man von der Medicin 8 Pf. habe. Die Rechnung geschiehet folgender massen:

Gewichte	des ersten	Ingred.	4 Loth.
	des anderen		5 —
	des dritten		2 —
	Summe		11 L.

11. L. — 8 Pf. — 4 L.
32
256 L.
4
1024

131
1024 } 93 $\frac{1}{11}$ L. Gewichte des ersten Ingr.
111
1

11 L. — 8 Pf. — 5 L.
32
256 L.
5
1280

1
174
1280 } 116 $\frac{4}{11}$ L. Gewichte des andern Ingr.
1111
11

11 L. – 8 Pf. – 2 L.
32

256 L.
2

512

1
1̸7̸6
5̸1̸2̸ } $46\frac{6}{11}$ L. Gewichte des dritten Ingr.
1̸1̸1̸
1̸

Probe.

Gewichte	des ersten	Ingr.	$93\frac{1}{11}$	L.
	des anderen		$116\frac{4}{11}$	L.
	des dritten		$46\frac{6}{11}$	L.
	Summe		256	L.

Die 11. Anmerckung.

96. Man hat in verschiedenen Fällen einige Vortheile in der Regel Detri/ welche insgemein die Welsche Practica genennet werden. Uns begnüget die nützlichsten davon zu erzehlen. Weil die Regel Detri zu drey gegebenen Zahlen die vierdte Proportional-Zahl suchet (§. 85)/ wenn man aber zwey Zahlen durch eine Zahl dividiret/ die herauskommenden Quotienten mit ihnen einerley Verhältniß haben (§. 59); so dividiret die erste und andere/ oder auch (§. 83) die erste und dritte Zahl (wenn sie sich genau dividiren lassen) durch eine Zahl/ und brauchet die herauskommenden Quotienten an stat derselben in der Rechnung/ wie aus beygefügten Exempeln zu ersehen.

3 Pf.

3 Pf. kosten 9 Thl. wie viel 7 Pf.?
3) 1 3 3

fac. 21 Thl.

14 Pf. kosten 26 Thl. wie viel 7 Pf.?
7) 2 2) 1

fac. 13 Thl.

Die 12. Anmerckung.

97. Wenn entweder die erste oder dritte Zahl 1 und die andere von beyden nicht allzu groß/ die mittlere aber aus Zahlen von vielerley Arten zusammen gesetzet ist/ hat man nicht nöthig die in der 4 Anmerckung (§. 89) vorgeschriebene Reduction anzustellen /, wie folgendes Exempel ausweiset;

1 Pf. kostet 3 Thl. 8 gr. 6. pf. wie viel 5 Pf.?
5

fac. 16 Thl. 18 gr. 6 pf.

Nemlich ich sehe hier bald/daß 2 mahl 6 pf. einen Groschen machen / und also 5 mahl 6 pf. / 2. gr. 6. pf.; wiederum 3 mahl 8 gr. einen Thaler und also noch 2 mahl 8 darüber 16 gr. dannenhero addire ich den Thaler zu den übrigen 15 Thl. und die 2 gr. zu den 16. gr. So ist das verlangte facit 16 Thl. 18. gr. 6. pf.

Die 13. Anmerckung.

98. Wenn die zwey gleichnahmige Zahlen von einander um 1 unterschieden sind / kan man einen besonderen Vortheil brauchen / der sich durch Exempel am bequemsten zeigen lässet. Z. E. 5. Pf. kosten 30 Thl. wie viel 4 Pf.? Weil 4 Pf. um den fünfften Theil weniger kosten müssen als 5 Pf./ so dividire ich nur 30 durch 5 und den Quotienten 6 ziehe ich von 30 ab / so bleibet das facit 24. Thl. übrig. Item 8 Pf. kommen 24 Thl. wie viel 9 Pf.? Weil 9 Pf. um $\frac{1}{8}$ mehr als 8 kosten / so darf

darf ich nur den achten Theil von 24 / nemlich 3 Thlr. / zu 24 Thl. addiren / so kommet das facit 27 Thl.

Die 14. Anmerckung.

99. Unterweilen kan man verschiedene Vortheile bey einem Exempel anbringen.

100 Pf. kosten 30 Thl. 4 gr. wie viel 50 Pf.?
50) 2 2) ———— 1
Fac. 15 Thl. 2 gr.

Item: 60 Pf. kosten 80 Thl. was 2520 Pf.?
60) 1 6) ———— 42
480 ———
7) ———— 6
3360 Thl. Fac. 7

ENDE

der Rechen-Kunst.

An-

Anfangs-Gründe der Geometrie.

Die 1. Erklärung.

1. Die Geometrie ist eine Wissenschafft des Raumes/ den die cörperliche Dinge nach ihrer Länge / Breite und Dicke einnehmen.

Die 2. Erklärung.

2. Wenn man die Länge ohne die Breite und Dicke betrachtet / so nennet man sie eine Linie; ihren Anfang und Ende aber einen Punct, den man sich also ohne alle Theile gedencken muß/ massen er sonst eine Linie wäre und wieder seinen Anfang und Ende haben müste. Wenn sich nun ein Punct von einem Orte gegen den anderen beweget/ wird eine Linie beschrieben.

Anmerckung.

3. Die Geometræ haben zulängliche Ursachen gehabt/ warum sie den Punct untheilbar annehmen/ unerachtet die Einbildung so wenig / als unsere Hand mit ihren Instrumenten einen untheilbahren Punct formiren kan. Damit er nemlich kein Theil der Linie würde; welches in der Ausübung der Geometrie mit Sorgfalt zu vermeiden.

Die 3. Erklärung.

4. Die Aehnlichkeit ist die Ubereinstimmung

dessen/ wodurch die Dinge von einander unterschieden werden.

Anmerckung.

5. Zum Exempel/ ich habe zwey Sachen A und B und betrachte eine nach der anderen. Ich mercke mit Fleiß auf alles / was nur in der Sache A wahrzunehmen / und zeichne es auf das genaueste auf. Gleichergestalt schreibe ich alles Haar-klein auf / was ich in der Sache B erkennen kan. Wenn ich nun beydes gegen einander halte/ was ich aufgezeichnet habe/ so finde ich, daß es einerley sey. Die Grösse wird ausgenommen / weil man einem diese nicht mit blossen Worten begreiflich machen kan.

Zugabe.

6. Also können ähnliche Dinge nicht von einander unterschieden werden, wenn man sie nicht entweder würcklich oder in Gedancken vermittelst einer dritten Sache, z. E. eines Maaß-Stabes zusammen bringet.

Die 4. Erklärung.

I. 1. 7. **Eine** gerade Linie AB **ist/ deren Theil der gantzen ähnlich ist. Eine krumme Linie** AB **ist/ deren Theile der gantzen unähnlich sind.**

Die 1. Anmerckung.

8. Auf dem Papiere wird eine gerade Linie mit einer Reiß-Feder oder einem subtilen Stifte nach dem Lineale gezogen / welches man auf die zwey gegebenen Puncte anleget ; auf dem Holtze oder Steine durch einen mit Kreide oder Rötel bestrichenen Faden aufgeschlagen ; auf dem Felde mit zwey Stäben abgesteckt / die an ihren Enden aufgerichtet werden. Es kan aber mit zwey Stäben der dritte in einer geraden Linie gestecket werden/

den/ wenn das Auge/ so gegen den einen gerichtet wird/ die anderen beyde nicht siehet.

Die 2. Anmerckung.

9. Man nimmet zum Maaß-Stabe der Linie eine gewisse Linie oder Länge an / welche man eine Ruthe nennet. Dieselbe theilet man um die Beschweerlichkeit im Rechnen zu vermeiden / in 10 gleiche Theile und nennet einen derselben einen Schuh: der Schuh wird in 10 Zoll und der Zoll in 10 Linien getheilet. Weil aber der Maaß-Stab willkührlich ist/ so kan man leicht erachten / daß nicht an allen Orten der Schuh von gleicher Grösse sey.

Die 3. Anmerckung.

10. Auch ist wohl zu mercken / daß nicht an allen Orten die Ruthen und Schuhe auf gleiche Art eingetheilet werden. Denn das Rheinländische Maaß wird immer in 12 getheilet / da hingegen das Geometrische nur 10 Theile hat.

Die 5. Erklärung.

11. **Unter den krummen Linien ist die bekandteste und zur Zeit die nützlichste** die Circul-Linie. **Es wird aber ein Circul beschrieben/wenn eine gerade Linie CA sich um einen festen Punct C beweget.** 1. 2.

Anmerckung.

12. Auf dem Papiere wird dieses mit einem besonderen Instrumente verrichtet / welches man einen Zirckel nennet. Auf dem Felde und im grossen brauchet man an stat der Linie einen Faden/ oder eine Schnure/ oder eine Stange: wie man denn auch besondere Stangen-Zirckel hat.

Die 6. Erklärung.

13. **Der Punct C heisset** der Mittel-Punct 1. 2.

(Centrum), weil alle Puncte in der Peripherie gleich weit von demselben abstehen (§. 11); die Linie CA der Halbmesser (Semidiameter oder Radius); die Linie/ so von einem Puncte der Peripherie D biß zu dem anderen E durch den Mittel-Punct C gezogen wird / der Durchmesser (Diameter): eine andere auf gleiche Art / aber nicht durch den Mittel-Punct gezogene Linie FG eine Sehne (Chorda, Subtensa).

Anmerckung.

14. Die Peripherie eines jeden Circuls/ er mag groß oder klein seyn / wird in 360 gleiche Theile oder Grade eingetheilet. Weil sich diese Zahl durch viel Zahlen genau dividiren lässet / als durch 2.3.4.5.6.8.9.10.12 und so weiter. Jeder Grad bestehet aus 60 Minuten/ jede Minute aus 60 Secunden / u. s. w. die Grade zeichnet man mit (o) wie die Ruthen / die Minuten mit (′) wie Schuhe. Z. E. 3° 25′ 17″ heisset 3 Grad/ 25 Minuten / 17 Secunden. 3° 2′4″. 3 Ruthen / 2 Schuh/ 4 Zoll.

Die 7 Erklärung.

1. 3. 15. Wenn man zwey Linien AB und AC in einem Puncte A zusammen setzet / so heisset ihre Neigung gegen einander ein Winckel.

Anmerckung.

16. Diesen Winckel nennet man entweder mit einem Buchstaben A / oder in gewissen Fällen um die entstehende Verwirrung mit anderen Winckeln zu vermeiden mit drey Buchstaben BAC/ so daß derjenige mitten stehet/ welcher an der Spitze des Winckels zu finden. Seine Grösse aber pfleget man durch einen Circul-Bogen/ der

der aus dem Mittel-Puncte A mit beliebiger Eröffnung des Zirckels beschrieben wird / zu messen. Nemlich so viel der Bogen D E Grade und Minuten hat / so viel Grade und Minuten eignet man den Winckel A zu. Man erforschet aber ihre Anzahl durch halbe Circul von Meßing / davon die kleinen / so auf dem Papiere gebrauchet werden / Transporteurs heissen.

Die 8. Erklärung.

17. **Wenn eine Linie AB auf der anderen CD dergestalt aufgerichtet stehet / daß die Winckel zu beyden Seiten einander gleich sind; so saget man / es stehe dieselbe auf CD perpendicular oder senckrecht.** I. 4.

Die 9. Erklärung.

18. **Der Winckel ABC, den die Perpendicular-Linie AB mit der Linie BC machet / heisset ein rechter Winckel (angulus rectus): Ein jeder kleinerer Winckel E ein spitziger Winckel (angulus acutus) und ein jeder grösserer F ein stumpffer Winckel (angulus obtusus.)** I. 4. I. 5. I. 6.

Die 10. Erklärung.

19. **Wenn man einen Winckel A durch eine gerade Linie BC schliesset / so entstehet ein Dreyecke oder Triangel. Man nennet es aber rechtwinckelicht, wenn der eine Winckel A ein rechter ist: stumpffwinckelicht, wenn der eine Winckel D ein stumpffer ist; spitzwinckelicht, wenn alle drey spitzig sind / wie A, B, C. Hingegen wenn alle drey Seiten AB, BC, CA gleich sind / heisset es ein gleichseitiger Triangel (Triangulum** I. 7. I. 8. I. 9.

gulum æquilaterum): sind zwey Seiten AB und BC gleich/ ein gleichschenckelichter (Triangulum æquicrurum oder isosceles): ist keine Seite der anderen gleich/ ein ungleichseitiger, als HIK, (Triangulum Scalenum). I. 10. I. 11.

Die 11. Erklärung.

20. Ein Quadrat (Quadratum) ist eine Figur/ die 4 gleiche Seiten AB, BC, CD, AD und lauter rechte Winckel hat. Ein länglichtes Vier-Ecke (Oblongum oder Rectangulum) hat lauter rechte Winckel/ aber es sind nur die zwey einander entgegengesetzte Seiten EF und HG, ingleichen EH und FG einander gleich: Eine Raute (RHOMBUS) hat vier gleiche Seiten IK, KL, LM, IM und lauter schiefe Winckel. Eine länglichte Raute (RHOMBOIDES) hat zwar lauter schiefe Winckel/ aber nur die beyde einander entgegen gesetzte Seiten ON und PQ, OP und QN sind einander gleich. Die übrigen Vier-Ecke werden TRAPEZIA genennet/ als STVZ. I. 12. I. 13. I. 14. I. 15. I. 16.

Die 12. Erklärung.

21. Die übrigen Figuren/ so mehr als vier Seiten haben/ werden Polygone oder Viel-Ecke genennet: und insonderheit Fünf-Ecke, wenn sie fünff; Sechs-Ecke, wenn sie sechs Seiten haben/ u. s. w. Sind alle Seiten und Winckel einander gleich/ als in ABCDEF, heisset sie eine Reguläre oder ordent- I. 17.

ordentliche Figur: sind aber die Seiten und Winckel nicht alle einander gleich / als in GHIKL, so nennet man sie eine Irreguläre oder unordentliche Figur.

I. 18.

Die 13. Erklärung.

22. Wenn zwey Linien AB und CD immer eine Weite von einander behalten / so sind es Parallel-Linien.

I. 19.

Die 14. Erklärung.

23. Die Vier-Ecke / deren Seiten einander parallel sind / nennet man Parallelogramma.

Der 1. Grundsatz.

24. Zwischen zweyen Puncten kan nur eine gerade Linie seyn.

Der 1. Zusatz.

25. Derowegen können zwey gerade Linien keinen Raum einschliessen, weil sie in ihren beyden äusersten Puncten zusammen stossen müssen.

Der 2. Zusatz.

26. Folgends sind in jedem Drey-Ecke zwey Seiten AB und AC zusammen genommen grösser als die dritte BC.

I. 19.

Der 2. Grundsatz.

27. Alle Radii eines Circuls sind einander gleich (§. 13).

Der 3. Grundsatz.

28. Alle Bogen DE und BC, welche aus der Spitze eines Winckels A innerhalb sei-

I. 20.

seinen Schenckeln AB und AC beschrieben werden/ haben eine gleiche Zahl Grade.

Zusatz.

29. Weil man die Grösse des Winckels A nach der Zahl der Grade eines solchen Bogens DE oder BC erachtet (§. 16); so gilt es gleich viel, ob der Bogen DE mit einem grossen oder kleinen Radio beschrieben wird, wenn man den Winckel messen will.

Der 4. Grundsatz.

30. **Wenn gerade Linien und Winckel einander decken/ so sind sie gleich: und wenn sie gleich sind/ decken sie einander.**

Der 5. Grundsatz.

31. **Figuren/ die einander decken/ sind einander gleich: und die gleich und ähnlich sind/ decken einander (§. 4).**

Anmerckung.

32. Es ist wohl zu mercken / daß von gleichen Figuren erfordert wird/ sie sollen alle beyde einander decken: denn wenn gleich die obere die untere decket / so sie auf dieselbe geleget wird / würde doch die untere die obere nicht decken/ wenn sie auf dieselbe geleget würde / wo sie nicht einander gleich wären. Nemlich wenn Figuren dergestalt auf einander geleget werden/ daß sie einander decken/ so haben sie einerley Umfang.

Der 6. Grundsatz.

33. **Wenn zwey Figuren oder Linien auf einerley Art erzeuget oder beschrieben werden/ und dasjenige/ woraus sie erzeuget oder beschrieben werden/ beyderseits**

seits

seits einander ähnlich ist; so sind die Figuren und Linien einander ähnlich (§. 4).

Zusatz.

34. Da nun alle Puncte (§. 2. 4), und gerade Linien einander ähnlich sind (§. 7), und ein jeder Circul erzeuget wird, wenn eine gerade Linie sich um einen Punct herum beweget (§. 11), so müssen alle Circul und ihre Peripherien einander ähnlich seyn.

Der 7. Grundsatz.

35. Wenn zwey Winckel einerley Maaß haben/ sind sie einander gleich: und wenn sie gleich sind / haben sie einerley Maaß (§. 16.)

Der 8. Grundsatz.

36. Auf jeder Linie AB kan man aus einem angenommenen Puncte C einen halben Circul beschreiben (§. 11). I. 21.

Zusatz.

37. Wenn man aus dem Mittel-Puncte C eine Perpendicular-Linie CD aufrichtet, so sind die beyden Winckel o und x einander gleich (§. 17). Derowegen hat ein rechter Winckel zu seinem Maaße einen Quadranten, das ist, 90° (§. 16. 36) und sind demnach alle rechte Winckel einander gleich (§. 35). Ja ein Winckel, der einem rechten gleich ist, ist ein rechter Winckel (§. 35).

Der 1. Lehrsatz.

38. Die beyden Winckel x und o, wel- I. 22.

che eine Linie DC auf einer anderen Linie AB machet/ machen zusammen 180°.

Beweiß.

Aus C kan auf der Linie AB ein halber Circul beschrieben werden (§. 36). Derowegen haben die Winckel x und o zu ihrem Maasse einen halben Circul (§. 16), folgends machen sie 180° (§. 14). **Welches zu erweisen war.**

Zusatz.

39. Wenn man also auf dem Felde zu einem Winckel nicht kommen kan, den man messen soll, oder wenn man mit einem Quadranten einen stumpffen Winckel zu messen hat; darf man nur den Neben-Winckel (angulum contiguum) messen.

Der 2. Lehrsatz.

I. 23. 40. **Wenn eine Linie AB die andere CD in E schneidet/ so sind die Vertical-Winckel o und x einander gleich.**

Beweiß.

Denn $o + u = 180°$ und $u + x = 180°$ (§. 38). Also ist $o + u = u + x$ (§. 22. Arithm.) folgends $o = x$ (§. 25. Arithm.) W. Z. E.

Zusatz.

41. Daher kan man auf dem Felde, oder wo man sonst Winckel zu messen hat, an stat des Winckels x seinen Vertical-Winckel o messen, wenn man jenem nicht beykommen kan.

Der 3. Lehrsatz.

I. 24. 42. **Alle Winckel/ die um einen Punct C her-**

herum sind/ machen zusammen vier rechte Winckel/ oder 360°.

Beweiß.

Ihr Maaß ist ein gantzer Circul (§. 11. 16). Also halten sie zusammen vier rechte Winckel in sich (§. 37) oder 360° (§. 14). W. Z. E.

Die 1. Aufgabe.

43. **Einen vorgegebenen Winckel zu messen.**

Auflösung.

Auf dem Papiere. II. 25.

1. Leget den Mittelpunct des Transporteurs auf die Spitze des Winckels A und rücket das Instrument, biß die innere Schärffe des Lineals an die Linie AB streichet.
2. Zehlet die Grade an dem Bogen DE, die zwischen die Schenckel des Winckels AC und AB fallen.

Auf dem Felde. I. 26.

1. Richtet den Winckel-Messer dergestalt, daß der Diameter AB auf den einen Schenckel des Winckels fället.
2. Verschiebet das an dem Mittel-Puncte D bewegliche Lineal EF und zielet durch die Dioptern auf denselben, biß ihr das äusserste des anderen Schenckels erblicket.
3. Zehlet die Grade, so das Lineal auf dem Instrumente abschneidet.

So wisset ihr in beyden Fällen die Grösse des Winckels (§. 16).

Die

Die 2. Aufgabe.

44. Eine gerade Linie zu messen.

Auflösung.

II. 27. Vor allen Dingen bereitet man sich einen Maaß-Stab. Auf dem Papiere nehmet eine Linie, schneidet davon 10 kleine Theile für die Schuhe ab und traget sie zusammen so viel mahl in den übrigen Theil der Linie, als angehen will, für die Ruthen. So habet ihr einen Maaß-Stab (§. 9). Auf dem Felde brauchet man entweder eine Kette, oder eine Schnure, oder eine Stange, die in ihre gehörige Zolle, Schuhe und Ruthen eingetheilet worden. Doch ist zu mercken, daß man nur die letzte Ruthe in Schuhe und den letzten Schuh in Zolle eintheilen darf.

Wenn ihr nun auf dem Papiere eine Linie messen wollet, so

II. 27. 1. Setzet den Zirckel in A und thut ihn auf biß in B.

2. Den einen Fuß dieses unverrückten Zirckels setzet auf dem Maaß-Stabe in den Anfang einer Ruthe als in 10 und gebet acht, welchen Schuh der andere Fuß absticht, z. E. 5. So ist die Linie 1° 5'.

Auf dem Felde.

1. Stecket an beyden Enden der Linie einen Stab und (wenn eure Meß-Kette nicht so lang ist) zwischen dieselbe noch einen oder mehr andere (§. 8).

2. Span-

2. Spannet die Schnure oder Kette von einem Stabe biß zu dem anderen aus.
3. Zehlet endlich daran die Ruthen, Schuhe und Zolle.

Die 1. Anmerckung.

45. Ihr könnet auch an die beyden Ende der Meß-Ketten 2 Rincken machen/ durch dieselben zwey Stäbe stecken/ und diese jederzeit mit dem Stabe an dem Ende der Linie/ die ihr messet/ in eine Linie stellen (§. 8).

Die 2. Anmerckung.

46. Die Meß-Ketten sind etwas beschweerlich zu tragen/ und lassen sich nicht wohl ausziehen. Wenn man die Linie mit einer Stange überschläget / muß man so viel Stangen-Dicken zu der gefundenen Länge addiren/ als die Stange überschlagen worden / oder sie um eine Stangen-Dicke kürtzer machen / als das Maaß erfordert. Die hanffene Meß-Schnüre kriechen vom Feuchten ein und dehnen sich ungleich aus. Es mercket Schwenter an (Geom. pract. lib. I. Tract. 2. p. 381.) Daß ihm eine dergleichen Schnure von 16 Schuhen innerhalb einer Stunde vom Reiffe fast um einen gantzen Schuh eingegangen. Diesem Fehler nun abzuhelffen / soll man sie wiedersinnes winden / in Lein-Oele sieden / nachdem sie getrocknet / durch ein zerlassen Wachs ziehen / und mit hartem Wachse durch und durch bestreichen lassen. Es versichert Schwenter p. 382. daß / wenn man sie auch einen gantzen Tag im Wasser liegen lässet / sie doch nicht mercklich kürtzer werden.

Die 3. Anmerckung.

47. Man hat auf dem Papiere noch ein künstlicheres Instrument die Linien abzumessen / welches man einen verjüngten Maaß-Stab nennet. Davon sich erst unten wird reden lassen.

Die

Die 3. Aufgabe.

48. **Einen Winckel zu machen / der so groß ist / wie ein anderer gegebener Winckel.**

Auflösung.

II. 25. **Der erste Fall.** Wenn der Winckel in Graden gegeben wird, so

1. Ziehet eine gerade Linie AB.
2. Leget auf A den Mittelpunct des Transporteurs und an die Linie AB seinen Radium.
3. Zehlet an demselben so viel Grade ab, als der Winckel haben soll.
4. Bey dem letzten Grade mercket euch den Punct E.
5. Ziehet endlich von A durch E eine gerade Linie. So ist BAC der verlangte Winckel.

II. 29. **Der andere Fall.** Wenn der Winckel DEF nur auf dem Papiere gegeben wird, so

1. Beschreibet aus E mit beliebter Eröffnung des Zirckels einen Bogen GH.
2. Ziehet eine gerade Linie ef.
3. Beschreibet mit voriger Eröffnung des Zirckels aus e den Bogen hi.
4. Setzet den Zirckel in H und thut ihn auf biß in G.
5. Mit dieser Eröffnung schneidet aus h von dem Bogen hi den Bogen hg ab.
6. Ziehet aus e durch g eine Linie ed.

So ist geschehen, was man verlangte.

Der dritte Fall. Auf das Feld kan man einen in Graden gegebenen Winckel durch den Win-

Winckelmesser tragen, wie aus der ersten Aufgabe (§. 43) abzunehmen.

Beweiß.

Im ersten und dritten Falle ist kein Beweiß nöthig. Im anderen Falle ist der Bogen $gh = GH$ wie unten (§. 92) ohne gegenwärtigen Satz soll erwiesen werden, und also der Winckel $def = DEF$, (§. 16. 35). W. Z. E.

Der 4. Lehrsatz.

49. **Wenn in zweyen Triangeln** ABC **und** abc **der Winckel** $A = a$, $AC = ac$ **und** $AB = ab$, **so sind die gantzen Triangel einander gleich/ und** $BC = bc$, $B = b$, $C = c$. II. 30.

Beweiß.

Man gedencke, es würde der Triangel acb dergestalt auf den anderen ACB geleget, daß der Punct a auf A und die Linie ab auf die Linie AB fället. Weil nun $ab = AB$, so fället der Punct b auf B (§. 30): weil $a = A$, so fället die Linie ac auf AC (§. 30) und, da $ac = AC$, der Punct c auf C (§. cit.); folgends die Linie bc auf BC (§. 24). Derowegen sind die Triangel ACB und acb einander gleich (§. 31), und $BC = bc$ &c. (§. 30). W. Z. E.

Der 5. Lehrsatz.

50. **Wenn in zweyen Triangeln** ACB **und** acb **der Winckel** $A = a$ **und** $B = b$, **über dieses die Seite** $AB = ab$, **so sind die gantzen Triangel einander gleich und** $AC = ac$, $BC = bc$, $C = c$. II. 30.

Be-

Beweiß.

Man gedencke, es werde der Triangel ABC auf den anderen abc dergestalt geleget, daß der Punct A auf a, und die Seite AB auf die Seite ab fället; so fället der Punct B auf b, die Linie AC auf ac und BC auf bc (§. 30). Da nun die Linien AC und BC im Puncte C und die Linien ac und bc im Puncte c zusammen stossen, muß auch der Punct C auf den Punct c fallen. Derowegen sind die Triangel einander gleich (§. 31), und AC = ac &c. (§. 30). W. Z. E.

Der 6. Lehrsatz.

II. 30. 51. **Wenn in zweyen Triangeln ACB und acb, AC = ac, AB = ab und BC = bc; so sind die Triangel einander gleich / und A = a, B = b, C = c.**

Beweiß.

Man beschreibe aus A mit AB den Bogen y und aus C mit CB den Bogen x. Hierauf gedencke man, es werde der Triangel acb auf den Triangel ACB dergestalt geleget, daß der Punct a auf A und c auf C fället (§. 30); so wird die Linie ab in den Bogen y und cb in den Bogen x fallen (§. 13), folgends der Punct b in B, wo die Bogen einander durchschneiden. Daher sind die Triangel (§. 31), und die Winckel (§. 30) einander gleich. W. Z. E.

Zusatz.

52. Also kan aus drey gegebenen Linien nicht mehr als einerley Triangel gemacht werden.

Die

Die 4. Aufgabe.

53. **Auf einer gegebenen Linie AB einen gleichseitigen Triangel aufzurichten.** II. 31.

Auflösung.

1. Setzet den Zirckel in A, thut in auf biß in B und beschreibet damit uber der Linie einen Bogen.
2. Setzet hierauf den Zirckel in B und beschreibet mit unveränderter Eröfnung einen anderen Bogen, der den ersten in C durchschneidet.
3. Ziehet von A und B in C die Linien AC und BC: so ist geschehen, was man verlangete.

Beweiß.

Die Linien AC und BC hat man so groß gemachet als die Linie AB (§. 27). Derowegen ist der Triangel ACB gleichseitig (§. 19). W. Z. E.

Die 5. Aufgabe.

54. **Aus zwey gegebenen Linien AB und BC einen gleichschenckelichten Triangel zu machen.** II. 32.

Auflösung.

1. Setzet an das eine Ende A der einen Linie AB, welche die Grund-Linie des Triangels geben soll, den Zirckel und beschreibet mit der Eröfnung nach der Länge der anderen gegebenen Linie einen Bogen.
2. Mit eben dieser Eröfnung beschreibet aus B einen anderen Bogen, der den ersten in C durchschneidet.

5. Ziehet aus C in A und B gerade Linien
So ist der begehrte Triangel fertig.

Beweiß.

Die Linien AC und CB hat man einander gleich gemachet. Also ist ACB ein gleichschenckelichter Triangel (§. 19). W. Z. E.

Die 6. Aufgabe.

II. 33. **55. Aus drey gegebenen Linien einen Triangel zu machen.**

Auflösung.

1. Nehmet die eine von den gegebenen Linien AB zur Grund-Linie des Triangels an.
2. Aus A beschreibet mit der Eröfnung des Zirckels nach der Länge der anderen Linie AC einen Bogen über derselben und
3. Aus B mit der Eröfnung nach der dritten Linie BC einen anderen Bogen, der den ersten in C durchschneidet.
4. Ziehet die Linien AC und CB, so ist der Triangel fertig (§. 52).

Die 1. Anmerckung.

56. Wenn die zwey Bogen einander nicht erreichen/ so kan aus den gegebenen drey Linien kein Triangel gemacht werden (§. 26).

Die 2. Anmerckung.

57. Die Zeichnung der Figuren ist von grossem Nutzen. Sie dienet die Felder in den Grund zu legen / ohne welches man sie nicht ausrechnen kan. Ja nachdem ich die Gründe der Aehnlichkeit in die Geometrie gebracht / dienet sie zugleich zum Beweise der Aehnlichkeit der Figuren / wie aus dem folgenden zu ersehen. Man kan auch aus demselben ersehen / was auf dem Felde oder sonst im grossen zu

zu messen nöthig ist/ wenn man es in Grund legen / das ist/ auf das Papier ins kleine bringen will. Derowegen lassen wir uns nicht verdriessen mehrere Aufgaben von den Dreyecken hieher zu setzen.

Die 7. Aufgabe.

58. Aus zwey gegebenen Linien AB und AC und einem Winckel A einen Triangel zu machen. II. 34.

Auflösung.

1. Nehmet die Linie AB zur Grundlinie an und
2. Machet in A einen Winckel, der dem gegebenen gleich ist, (§. 48).
3. Auf die Linie AB traget die andere gegebene Linie AC und
4. Ziehet von C biß B eine gerade Linie, so ist der Triangel fertig (§. 49).

Anmerckung.

59. In der Ausübung ist niemahls nöthig die unnützen Linien/ als hier AD, auszuziehen; sondern nachdem man das Lineal angeleget/ kan man gleich den Punct C abstechen.

Die 8. Aufgabe.

60. Aus zwey gegebenen Winckeln und einer Linie AB einen Triangel zu machen. II. 35.

Auflösung.

1. Auf dem einen Ende A der gegebenen Linie AB richtet einen Winckel auf, der einem von den gegebenen gleich und
2. Auf dem anderen Ende B einem anderen, der dem anderen von den gegebenen gleich ist, (§. 48). So werden sich die Schenckel dieser

Winckel in C durchschneiden und den verlangten Triangel ABC auf der Linie AB formiren (§. 50).

Die 9. Aufgabe.

II. 36. **61. Die Weite zweyer Oerter A und B zu messen/ zu deren jeden man aus einem in C angenommenen Stande kommen kan.**

Auflösung.

1. Stecket in C einen Stab nach Belieben ein.
2. Messet die Linie AC (§. 44) und traget sie zurücke in a, dergestalt daß in a ein Stab mit dem Stabe C und dem Orte A in eine gerade Linie gesetzet wird (§. 8).
3. Auf gleiche Weise messet die Linie BC, traget sie zurücke in b und stecket in b wie vorhin einen Stab mit C und B in einer geraden Linie ein (§. 8).
4. Endlich messet die Linie ab, so habet ihr die verlangte Weite.

Beweiß.

Denn die Winckel x und y sind einander gleich (§. 40). Da nun auch AC = aC und BC = bC, so ist ab = AB (§. 49). W. Z. E.

Anmerckung.

62. Wenn man nicht Raum hat die gantzen Linien AC und BC zurücke zu tragen/ so träget man nur ihre Helfften/ oder den dritten/ oder auch den vierdten Theil derselben zurücke: Alsdenn ist ab = $\frac{1}{2}$, oder $\frac{1}{3}$, oder $\frac{1}{4}$ AB wie unten wird erwiesen werden (§. 152).

Die

Die 10. Aufgabe.

63. **Mit einer blossen Schnure oder Kette einen Winckel auf dem Felde von einem Orte auf den anderen zu tragen.** II. 37.

Auflösung.

Man soll den Winckel A in C tragen.

1. Messet in den beyden Schenckeln AB und AC des gegebenen Winckels A zwey Linien von beliebiger Grösse AF und AD ab, und zugleich die Querlinie FD, so daher entstehet.
2. Traget aus C in d die gefundene Linie AD, spannet an den beyden Stäben C und d eine Schnure dergestalt aus, daß Cf = AF und df = DF.
3. Stecket in f einen Stab, so ist der Winckel dCf = FAD.

Beweiß.

Es ist AF = Cf, AD = Cd und DF = df: Derowegen ist auch der Winckel C dem Winckel A gleich (§. 51).

Die 11. Aufgabe.

64. **Die Weite zweyer Oerter zu messen, zu deren einem B man nur kommen kan.**

Auflösung.

1. Stecket nach Gefallen einen Stab in E und traget die Linie BE dergestalt zurücke, daß der Stab C mit E und B in eine Linie kommet (§. 8). II. 38.
2. Machet einen Winckel in C, der so groß ist wie der Winckel B (§. 63).

3. Endlich gehet mit dem Stabe D so weit zurücke, biß er mit C und F, ingleichen mit E und A in einer Linie stehet.

So ist die Linie CD der Linie AB gleich.

Beweiß.

Ihr habet den Winckel C so groß wie B und die Linie CE so groß wie EB gemachet. Nun sind über dieses die Vertical-Winckel bey E einander gleich (§. 40). Derowegen ist auch CD = AB (§. 50). W. Z. E.

Die 1. Anmerckung.

65. Es gilt auch hier, was bey der 9 Aufgabe erinnert worden (§. 62).

Die 2. Anmerckung.

66. Wenn man die Breite eines Flusses messen wolte und könte die Linie BE an dem Ufer nicht zurücke tragen; so stecket man den Stab B so weit vom Ufer weg als einem beliebet. Alsdenn wird die Linie CD um so viel breiter als der Fluß, um wie viel der Stab B von dem Ufer weggerücket worden.

Die 12. Aufgabe.

II. 39. 77. **Durch einen gegebenen Punct C mit einer gegebenen Linie AB eine Parallel-Linie auf dem Papiere zu ziehen.**

Auflösung.

1. Leget an die Linie AB das Lineal.
2. Setzet den Zirckel in C ein und thut ihn biß an das Lineal auf, als wenn ihr einen Bogen beschreiben woltet, der das Lineal oder die Linie AB beruhret.

3. Zie-

3. Ziehet mit dem Zirckel an dem Lineale herunter, so wird der andere Fuß durch den Punct C die begehrte Parallel-Linie DE beschreiben (§. 22).

Anders.

Man kan es auch durch ein Parallel-Lineal verrichten: welches Instrument aus zwey Linealen bestehet, die durch zwey gleich lange Quer-Bänder dergestalt zusammen verknüpffet sind, daß sie sich nach Gefallen von einander verschieben lassen. Wenn ihr nun dergleichen Instrument habet, so II. 40.

1. Leget die Schärffe des einen Lineals an die gegebene Linie AB an, und
2. Schiebet das andere Lineal biß an den Punct C fort, so
3. Könnet ihr durch denselben die verlangte Linie DE ziehen.

Anmerckung.

68. Wenn man in der ersten Auflösung den Zirckel nicht biß an den Punct E aufthun kan/ so ziehet mit AB in beliebiger Weite die Parallel-Linie CD und mit dieser die Parallel-Linie LM durch den gegebenen Punct E: so wird LM auch mit AB parallel seyn. Denn EF = IH und FG = IK. Derowegen EF + FG = HI + IK/ das ist/ EG = HK (§. 24. Arith.)/ folgends ist LM mit AB parallel (§. 22). II. 41.

Die 13. Aufgabe.

69. Von einem gegebenen Puncte C auf eine Linie AB ein Perpendicul zu fällen. II. 42.

Auflösung.

1. Setzet den Zirckel in C und durchschneidet mit gefälliger Eröfnung in zweyen Puncten D und E die Linie AB.
2. Aus D und E macht mit beliebiger Eröfnung des Zirckels einen Durchschnitt in F.
3. Durch C und F ziehet die Linie FG, diese stehet auf AB perpendicular.

Beweiß.

Denn weil DC = CE und DF = FE, so sind auch die Winckel DFG und GFE (§. 51), folgends die Neben-Winckel bey G einander gleich (§. 49). Derowegen stehet die Linie CG auf AB perpendicular (§. 17). W. Z. E.

Die 14. Aufgabe.

II. 43. 70. **Aus einem gegebenen Puncte C auf einer gegebenen Linie AB ein Perpendicul aufzurichten.**

Auflösung.

1. Setzet den Zirckel in C ein und
2. Durchschneidet die Linie AB mit beliebter Eröfnung in D und E.
3. Aus D und E machet mit einerley Eröfnung des Zirckels einen Durchschnitt in F.
4. Ziehet durch C und F die Linie GC, so stehet sie auf AB perpendicular.

Beweiß.

Weil DC = EC und DF = EF, so sind die Winckel bey C einander gleich (§. 51). Demnach stehet

stehet die Linie GC auf AB perpendicular (§. 17). W. Z. E.

Anders.

Lasset euch einen Winckel-Hacken verfertigen, das ist, ein Instrument, welches aus zweyen rechtwinckelichten zusammen gesetzten Linealen bestehet.

1. Das eine Theil dieses Instruments leget an die gegebene Linie AB dergestalt, daß die Spitze seines Winckels den gegebenen Punct C berühret. II. 44.
2. Ziehet nach dem anderen Theile des Instruments eine gerade Linie CD aus dem gegebenen Puncte C. Diese stehet auf AB perpendicular.

Beweiß.

Denn der Winckel-Hacken ist rechtwinckelicht: derowegen müssen auch die beyden Linien CB und CD, die nach ihm gezogen sind, einen rechten Winckel machen. Und also stehet CD auf CB perpendicular. (§. 18). W. Z. E.

Der 7. Lehrsatz.

71. **Wenn in zweyen rechtwinckelichten Triangeln ABC und abc, AB = ab und BC = bc, oder in schiefwinckelichten ausser diesen Seiten A = a, so sind die gantzen Triangel einander gleich und AC = ac, B = b und C = c.** II. 45.

Beweiß.

Man beschreibe durch C in der Weite BC einen Bogen FG und lege in Gedancken den Triangel

gel abc auf den anderen ABC dergestalt, daß der Punct a auf A und ab auf AB fället. Da nun ab = AB, und a = A. so fället der Punct b in B und ac auf AC. Da nun ferner bc = BC; so muß der Punct c auch in den Bogen FG fallen (§. 15), folgends in C, wo der Bogen FG und die Linie AC einander durchschneiden, und demnach fället bc auf BC (§. 24). Derowegen sind die gantzen Triangel einander gleich (§. 31). W. Z. E.

Der 8. Lehrsatz.

III. 46. 72. **Wenn zwey Parallel-Linien AB und CD von einer dritten EF in G und H durchschnitten werden/ so sind 1. die Wechsels-Winckel x und y einander gleich/ 2. der äussere Winckel o ist dem inneren y gleich/ und 3. die beyden inneren Winckel u und y machen zusammen 180°.**

Beweiß.

1. Ziehet die beyden Perpendicular-Linien HI und GK, welche einander gleich sind (§. 22). Es sind aber auch die Winckel I und K einander gleich (§. 18. 37). Derowegen ist $x = y$ (§. 71): **welches das erste war.**

2. Nun ist $x = o$ (§. 40). Demnach $y = o$ (§. 22. Arithm.): **welches das andere war.**

3. Es ist aber $u + o = 180°$ (§. 38). Derowegen ist auch $u + y = 180°$ (§. 24. Arithm.) W. Z. E.

Der

Der 9. Lehrsatz.

73. **Wenn zwey Linien** AB **und** CD **von einer dritten** EF **dergestalt in** G **und** H **durchschnitten werden/ daß die Wechsels-Winckel** x **und** y, **oder auch der äussere** o **und der innere** y **einander gleich sind/ oder die beyden inneren** u **und** y **zusammen 180° machen; so sind die Linien** AB **und** CD **parallel.** III. 46.

Beweiß.

1. Lasset aus G einen Perpendicul GK auf die Linie CD fallen: machet GI = HK und ziehet die Linie HI. Weil nun x = y; so ist I = K und HI = GK (§. 49), folgends I ein rechter Winckel (§. 37) und AB mit CD parallel (§. 22): **Welches das erste war.**

2. Es sey o = y. Weil nun o = x (§. 40); so ist x = y (§. 22. Arithm.), folgends vermöge dessen, was erst erwiesen worden, sind die Linien AB und CD parallel: **welches das andere war.**

3. Es mache y mit u 180°. Weil o und u = 180° machen (§. 38); so ist o = y (§. 22. 25. Arithm.) und also vermöge dessen, was jetzt erwiesen worden, sind die Linien AB und CD parallel: **welches das dritte war.**

Der 10. Lehrsatz.

74. **In jedem Triangel** ABC **machen alle drey Winckel zusammen 180°/ und wenn man die eine Seite verlängert/ so ist der äussere Winckel so groß/ wie die beyden inne-** II. 47.

inneren / die ihm gegen über stehen / zusammen.

Beweiß.

Man ziehe durch die Spitze des Triangels C mit seiner Grund-Linie AB eine Parallel-Linie DE, so ist 1 = I, und 2 = II (§. 72). Nun I + 3 + II = 180° (§. 38): derowegen 1 + 3 + 2 = 180° (§. 24. Arithm.). **Welches das erste war.**

II. 48. Wenn die Seite AB verlängert wird in D, so ist 3 + 4 = 180° (§. 38). Nun ist aber jetzt erwiesen worden, daß 1 + 2 + 3 = 180°. Derowegen 3 + 4 = 1 + 2 + 3 (§. 22. Arithm.), folgends 4 = 1 + 2 (§. 25. Arithm.) **welches das andere war.**

Der 1. Zusatz.

75. Derowegen kan in einem Triangel nicht mehr als ein rechter Winckel seyn und wenn dieses ist, machen die zwey übrigen zusammen auch noch einen rechten Winckel, das ist, 90° aus (§. 37): auch können zwey Linien, die auf einer dritten perpendicular stehen, von keiner Seite zusammen stossen, wenn sie gleich unendlich fort verlängert werden, und sind demnach parallel.

Der 2. Zusatz.

76. Viel weniger kan mehr als ein stumpfer Winckel in einem Triangel seyn (§. 18).

Der 3. Zusatz.

77. Wenn man in einem Triangel einen Winckel von 180° abziehet, so bleibet die Summe der beyden übrigen übrig: Und wenn man die Sum-

Summe zweyer von 180° wegnimmet, bleibet der dritte übrig.

Der 4. Zusatz.

78. Wenn in zweyen Triangeln zwey Winckel zweyen gleich sind, muß auch der dritte in einem dem dritten in dem anderen gleich seyn (§. 25. Arithm.)

Der 11. Lehrsatz.

79. **In einem gleichschencklichten Triangel ABC sind die Winckel an der Grund-Linie x und y einander gleich und die Perpendicular-Linie CD theilet so wohl den Winckel C als die Grund-Linie AB und den Triangel in zwey gleiche Theile.** III. 49.

Beweiß.

Man theile die Linie AB in zwey gleiche Theile in D und ziehe die Linie DC. Weil nun auch AC = CB (§. 19), so ist x = y und o = u, m = n und △ ACD = △ CDB (§. 51), folgends CD auf AB perpendicular (§. 17). W. Z. E.

Zusatz.

80. Also sind in einem gleichseitigen Triangel alle Winckel einander gleich, und folgends jeder 60° (§. 74).

Der 12. Lehrsatz.

81. **Wenn die Winckel x und y an der Grund-Linie AB eines Triangels ACB einander gleich sind/ so sind auch die Seiten AC und CB einander gleich.**

Be-

Beweiß.

III. 49.

Man ziehe die Linie CD dergestalt, daß $m = n$. Weil nun $x = y$, so ist auch $o = u$ (§. 78) und daher $AC = CB$ (§. 50). W. Z. E.

Zusatz.

82. Wenn also drey Winckel einander gleich sind, und folgends ein jeder 60 Grad hält (§. 74): so sind alle drey Seiten einander gleich.

Der 13. Lehrsatz.

83. Der Winckel an dem Mittel-Puncte eines Circuls ist zweymahl so groß wie der Winckel an der Peripherie / der mit ihm auf einem Bogen stehet.

Beweiß.

III. 50.

1. $o = x + u$ (§. 74). Weil aber $AC = BC$ (§. 27), so ist $x = u$ (§. 79), folgends $o = u + u = 2u$.

III. 51.

2. $x = 2y$ und $u = 2o$, wie erst n. 1. erwiesen worden. Derowegen ist $x + u = 2y + 2o$ (§. 24. Arithm.).

III. 52.

3. $o + x = 2u + 2y$ und $o = 2u$, wie n. 1. erwiesen worden. Derowegen ist $x = 2y$ (§. 25. Arithm.). W. Z. E.

Der 1. Zusatz.

III. 50. III. 54. III. 55.

84. Also hat der Winckel an der Peripherie ABD zu seinem Maasse den halben Bogen AD, darauf er stehet: Denn der gantze Bogen AD ist das Maaß des Winckels bey dem Mittel-Puncte ACD (§. 16). Wenn der Winckel ACB auf einem halben Circul ADB oder HBK auf einem gröſ-

grösseren Bogen HIK als einem halben Circul stehet; so ist klar daß der halbe Bogen AD des Winckels ACD und $\frac{1}{2}$ DB des Winckels DCB, gleichergestalt $\frac{1}{2}$ HI des Winckels HBI und $\frac{1}{2}$ IK des Winckels IBK, folgends $\frac{1}{2}$ ADB oder ein Quadrant des Winckels ACB und $\frac{1}{2}$ HIK, oder mehr als ein Quadrant des Winckels HBK Maaß sey.

Der 2. Zusatz.

85. Wenn zwey oder mehrere Winckel ABC und ADC an der Peripherie eines Circuls sich enden, und auf einem Bogen AC stehen, so sind sie einander gleich (§. 35). III. 53.

Der 3. Zusatz.

86. Jeder Winckel in einem halben Circul ABC ist ein rechter Winckel: denn er stehet auf einem halben Circul, und also ist sein Maaß ein Quadrant (§. 84). III. 54.

Der 4. Zusatz.

87. Wenn der Winckel innerhalb einem Circul auf einem kleineren Bogen DE als einem halben Circul stehet; so ist er kleiner als ein rechter Winckel. Stehet er aber auf einem grösseren HK; so ist er auch grösser als ein rechter Winckel (§. 86) und dannenhero in dem ersten Falle spitzig: in dem anderen stumpf (§. 18). III. 55.

Die 15. Aufgabe.

88. **Einen Winckelhacken zu probiren/ ob er richtig ist oder nicht.** III. 54.

Auf-

Auflösung.

1. Beschreibet nach Belieben einen halben Circul ACB, und
2. Ziehet nach Gefallen von beyden Enden des Diametri AB biß an die Peripherie die Linien AC und BC.
3. Leget den Winckelhacken mit seinem Winckel an den Punct C. Wenn die Schenckel desselben die beyden Linien zugleich berühren, so ist er richtig:

Beweiß.

Der Winckel ACB ist ein rechter Winckel (§. 86). Wenn also der Winckelhacken sich in denselben schicket; so ist er richtig (§. 30). W. Z. E.

Die 16. Aufgabe.

89. **Auf das Ende einer Linie ein Perpendicul aufzurichten.**

Auflösung.

III. 56.

1. Setzet den Zirckel in einen beliebten Punct C und thut ihn auf biß A.
2. Mit dieser Weite bemercket auf der Linie AB den Punct D.
3. Leget das Lineal auf D und C, und bemercket aus C mit unverrücktem Zirckel den Punct E.
4. Endlich ziehet die Linie AF, so stehet sie auf AB perpendicular.

Beweiß.

Weil AC = CD = BC, so lässet sich aus C durch E, A und D ein halber Circul beschreiben (§. 27. 36). Derowegen ist bey A ein rechter Win-

Winckel (§. 86) und stehet die Linie FA auf AB perpendicular (§. 18). W. Z. E.

Anders.

Man kan es auch durch Hülffe des Winckelhackens wie oben (§. 70) verrichten.

Die 17. Aufgabe.

90. **Eine Linie AB in zwey gleiche Theile zu theilen.** III. 57.

Auflösung.

1. Machet aus A und B nach Belieben Durchschnitte in C und D.
2. Ziehet die Puncte derselben mit einer geraden Linie DC zusammen, so theilet sie die Linie AB in zwey gleiche Theile.

Beweiß.

Weil AC = CB und AD = DB, so ist o = y (§. 51). Und daher ferner auch in den Triangeln ACE und ECB, AE = EB (§. 49). W. Z. E.

Anmerckung.

91. Man kan es auch Mechanisch/ das ist/ durch Versuchen verrichten. Setzet nemlich einen Zirckel in A ein/ und thut ihn nach dem Augen-Maaße so weit auf/ als bey nahe die Helffte der Linie AB träget. Schneidet damit ein in C und gleichfals aus B in D: so werdet ihr ohne Mühe durch das Augen-Maaß den Punct E finden können/ wodurch AB in zwey gleiche Theile getheilet wird. III. 58.

Der 14. Lehrsatz.

92. **In einem Circul sind die Sehnen gleicher Bogen AB und DE einander gleich: und wenn die Sehnen gleich sind/ so sind auch die Bogen gleich.** III. 59.

Beweiß.

Man ziehe aus dem Mittel-Puncte C die Radios AC, CB, CE und CD. Dieselben sind alle einander gleich (§. 27). Weil nun ferner die Bogen AB und DE gleich sind, so müssen auch die Winckel ACB und DCE gleich seyn (§. 35). Derowegen ist auch AB = DE (§. 49): **welches das erste war.**

Wenn AB = DE, so ist o = x (§. 51), folgends sind die Bogen AB und DE einander gleich (§. 35): **welches das andere war.**

Zusatz.

93. Wenn man also einen Circul in gleiche Theile theilet, und die Sehnen der Bogen ziehet, so hat die Figur lauter gleiche Seiten (§. 92); aber auch lauter gleiche Winckel (§. 85). Derowegen ist es eine reguläre Figur (§. 21).

Die 18. Aufgabe.

III. 60. 94. **Einen Circul-Bogen in zwey gleiche Theile zu theilen.**

Auflösung.

1. Machet aus A und B mit beliebter Eröfnung des Zirckels zwey Durchschnitte in C und D.
2. Ziehet durch die Puncte C und D eine Linie, so ist der Bogen AB in zwey gleiche Theile in E getheilet.

Beweiß.

Die Linie CD theilet die Linie AB in F in zwey gleiche Theile, und machet bey F zwey rechte Winckel (§. 90). Derowegen ist auch AE = BE (§. 49),

(§. 49), folgends sind die Bogen AE und EB einander gleich (§. 92). W. Z. E.

Der 15. Lehrsatz.

95. **Die Perpendicular-Linie DA, welche die Sehne EF in G in zwey gleiche Theile theilet, gehet durch den Mittelpunct des Circuls C, und theilet auch den Bogen EDF in zwey gleiche Theile. Und wenn aus dem Mittelpuncte des Circuls C ein Perpendicul CD auf die Sehne EF gezogen wird, theilet es so wohl sie als den Bogen EDF in zwey gleiche Theile.** III. 61.

Beweiß.

1. Weil EG = GF und bey G zwey rechte Winckel, so ist EAD = DAF (§. 49) und also sind die Bogen ED und DF einander gleich (§. 84. 35): **welches das erste war.**

2. Es müssen ferner die Sehnen EA und AF (§. 49) und folgends die Bogen AF und EA (§. 92) einander gleich seyn. Demnach ist AE + ED = AF + FD (§. 24. Arithm.), und dannenhero AD der Diameter des Circuls, folgends gehet AD durch den Mittel-Punct (§. 13): **welches das andere war.**

3. Wenn CG auf EF perpendicular stehet, so sind bey G rechte Winckel (§. 18). Da nun EC = CF (§. 27); so ist EG = GF und ECD = DCF (§. 71), folgends sind die Bogen ED und DF einander gleich (§. 35): **welches das dritte war.**

Die 19. Aufgabe.

III. 62. 96. **Einen Winckel BAC in zwey gleiche Theile zu theilen.**

Auflösung.

1. Setzet den Zirckel in A und bemercket mit beliebter Eröfnung die Puncte D und E.
2. Daraus machet einen Durchschnitt in F und
3. Ziehet die Linie AF, diese theilet den Winckel A in zwey gleiche Theile.

Beweiß.

Weil AD = AE und DF = EF, so ist o = x (§. 51). W. Z. E.

Die 20. Aufgabe.

III. 63. 97. **Durch drey gegebene Puncte A, B, C einen Circul zu beschreiben.**

Auflösung.

1. Machet aus A und B mit beliebter Eröfnung die Durchschnitte D und E, und ziehet die Linie DE.
2. Gleichergestalt machet aus B und C die Durchschnitte F und G, und ziehet die Linie FG.

Wo die beyden Linien FG und DE einander durchschneiden, nemlich in H, daselbst ist der Mittel-Punct des Circuls.

Beweiß.

Wenn man von A biß B, ingleichen von B biß C eine Linie ziehet, so sind selbige Sehnen zweyer Bogen von dem verlangten Circul (§. 13). Nun stehen die beyden Linien DE und FG auf diesen Seh

Sehnen AB und BC perpendicular, und theilen sie in zwey gleiche Theile (§. 90). Derowegen gehen beyde durch den Mittelpunct des Circuls (§. 95). Und ist demnach derselbe in H, wo die beyden Linien einander durchschneiden. W. Z. E.

Die 21. Aufgabe.

98. **Auf eine gegebene Linie AB ein Quadrat zu machen.** III. 64.

Auflösung.

1. Richtet in A ein Perpendicul auf (§. 70. 89) und machet es so groß wie AB.
2. Aus C und B machet mit AB einen Durchschnitt in D und
3. Ziehet die Linien CD und BD.

Die 22. Aufgabe.

99. **Aus zwey gegebenen Linien AB und BC ein Rectangulum zu machen.** III. 65.

Auflösung.

1. Setzet BC auf AB perpendicular (§. 89).
2. Ziehet aus A mit BC einen Bogen, und aus C mit AB einen anderen, der den ersten in D durchschneidet.
3. Endlich ziehet die Linien CD und DA.

Die 23. Aufgabe.

100. **Aus einer gegebenen Linie AB und einem schiefen Winckel einen Rhombum zu machen.** III. 66.

Auflösung.

1. Setzet auf die Linie AB den gegebenen Winckel A (§. 48) und machet AC = AB.

2. Aus C und B machet mit AB einen Durchschnitt in D.

3. Ziehet die Linien CD und DB.

Die 24. Aufgabe.

III. 67. **101. Aus zwey gegebenen Linien AB und AC nebst einem schiefen Winckel A einen Rhomboidem zu machen.**

Auflösung.

1. Richtet in A an dem Ende der einen gegebenen Linie AB den gegebenen Winckel auf (§. 48) und machet AC der anderen gegebenen Linie gleich.
2. Ziehet aus B mit AC einen Bogen, und aus C mit AB einen anderen, der den ersten in D durchschneidet.
3. Endlich ziehet die beyden Linien CD und DB.

Der 16. Lehrsatz.

IV. 68. **102. Ein Quadrat/ Rectangulum, Rhombus und Rhomboides wird von der Diagonal-Linie AD in zwey gleiche Theile getheilet: die beyden einander entgegen gesetzte Winckel sind einander gleich und die entgegen gesetzte Seiten AB und CD, AC und BD parallel.**

Beweiß.

In allen diesen Figuren ist AC = DB und CD = AB (§. 20). Derowegen sind die Triangel ACD und ABD einander gleich, ingleichen x = x und o = o, u = u (§. 51), folgends AB mit CD und AC mit BD parallel (§. 73). W. Z. E.

Zusatz.

Zusatz.

103. Also sind alle diese Vier-Ecke Parallelogramma (§. 23).

Die 25. Aufgabe.

104. **Den Winckel in einem regulären Viel-Ecke zu finden.**

Auflösung.

1. Theilet 360 durch die Zahl der Seiten des Viel-Eckes.
2. Was heraus kommet, ziehet von 180 ab, so bleibet die Zahl der Grade für den gegebenen Winckel übrig.

Z. E. Im Sechs-Ecke dividiret 360 durch 6, und ziehet den Quotienten 60 von 180 ab, so kommet für ABC 120°. IV. 69.

Beweiß.

Es sey ABC der verlangte Winckel. Man beschreibe durch die drey Puncte ABC einen Circul (§. 97). Weil AB = BC (§. 21), so sind auch die Bogen AB und BC einander gleich (§. 92). Da nun AD der halbe Bogen ADC das Maaß des Winckels B ist (§. 84); so darf man nur den Bogen AB von dem halben Circul BAD abziehen, wenn man den Bogen AD, oder den Winckel B wissen will. W. Z. E.

Die 26. Aufgabe.

105. **In einem jeden Viel-Ecke die Summe aller Winckel zu finden.** IV. 70.

Auflösung.

1. Multipliciret 180 durch die Zahl der Seiten.

2. Von dem Product ziehet 360 ab, so bleibet die Summe der Winckel übrig.

V Ecke	180	VI Ecke	180
	5		6
	9.00		1.080
	360		360
	540		720

Beweiß.

Ein jedes Viel-Ecke kan aus einem angenommenen Puncte F in so viel Triangel getheilet werden, als Seiten sind. Wenn ihr 180 durch die Zahl der Seiten multipliciret, so kommen die Winckel in allen Triangeln heraus (§. 74). Die Winckel um den Punct F gehören nicht zu dem Viel-Ecke, machen aber jederzeit 360° (§. 42). Derowegen wenn ihr 360 von oben gefundenem Producte abziehet, bleibet die Summe der Polygon-Winckel übrig. W. Z. E.

Die 27. Aufgabe.

106. Auf eine gegebene Linie AB ein begehrtes reguläres Viel-Ecke zu beschreiben.

Auflösung.

IV. 71. 1. Traget in A und B die halben Polygon-Winckel; so werden sich die Seiten des gleichschenckelichten Triangels ABC im Mittel-Puncte des Circuls C durchschneiden.

2. Beschreibet aus C mit CA den Circul und traget die Seite AB darinnen herum.

Die

Die 28. Aufgabe.

107. **In einem gegebenen Circul ein regulåres Viel-Ecke zu beschreiben.**

Auflösung.

1. Dividiret 360 durch die Zahl der Seiten, so habet ihr die Grösse des Winckels ACB. IV. 72.
2. Diesen traget an den Mittel-Punct des Circuls C (§. 48), so giebet sich die Seite des Viel-Eckes AB, die ihr
3. In dem Circul herum tragen könnet.

Der 17. Lehrsatz.

108. **Die Seite des Sechs-Eckes AB ist dem Radio des Circuls AC gleich.** IV. 72.

Beweiß.

Der Winckel ACB ist 60° (§. 107). Dannenhero sind die übrigen A und B 120° (§. 77). Nun weil AC = BC (§. 27); so ist auch A = B (§. 79), folgends ist jeder von beyden 60° und also dem Winckel C gleich. Derowegen ist auch AB = AC (§. 82). W. Z. E.

Der 1. Zusatz.

109. Also darf man nur den Radium sechsmahl in dem Circul herum tragen, wenn man in demselben ein Sechs-Ecke beschreiben soll.

Der 2. Zusatz.

110. Und wenn man auf eine gegebene Linie ein Sechs-Ecke machen soll, darf man nur einen gleichseitigen Triangel auf dieselbe setzen (§. 53), so ist die Spitze C der Mittel-Punct des Circuls, darein es kommen soll.

Die 29. Aufgabe.

IV. 73. **111. Aus allen Seiten der Figur und drey Diagonalen weniger als Seiten sind eine jede Figur zu zeichnen.**

Auflösung.

Weil eine jede Figur durch Diagonal-Linien in zwey Triangel weniger als Seiten sind, zertheilet wird, so hat man nichts nöthig, als (§. 55) immer einen Triangel auf den anderen zu setzen.

Die 30. Aufgabe.

IV. 74. **112. Aus allen Seiten der Figur und drey Winckeln weniger als Seiten sind/ eine jede Figur zu zeichnen.**

Auflösung.

1. Ziehet die Linie AB, so einer Seite gleichet, und traget auf A und B die gehörigen Winckel A und B (§. 48), so lassen sich
2. Die beyden Seiten EA und CB ansetzen.
3. Wenn ihr nun in E den gehörigen Winckel hinsetzet (§. 48), so lässet sich ED ansetzen, und DC ziehen.
4. Oder mit den letzten beyden ED und CD machet aus E und C einen Durchschnitt in D, so ist die Figur geschlossen.

Anmerckung.

113. Wenn alle Winckel weniger einen gegeben werden/ so dörffen zwey Seiten nicht gegeben werden.

Die 31. Aufgabe.

114. Ein Quadrat auszumessen.

Auf-

Auflösung

1. Messet die Seite des Quadrats, und
2. Multipliciret sie durch sich selbst, so kommet der Inhalt der Fläche heraus.

Seite des Quadrats 345''
345
―――
1725
1380
1035
―――
Inhalt der Fläche 119025''

Beweiß.

Wenn man eine Fläche ausmessen will, muß man auch eine Fläche zum Maaß-Stabe annehmen. Da nun das Quadrat lauter rechte Winckel und gleiche Seiten hat, ist selbiges zum Maaß-Stabe anzunehmen beliebet worden. Und demnach heisset eine Quadrat-Ruthe ein Quadrat, welches eine Ruthe lang und eine Ruthe breit ist, ein Quadrat-Schuh ein Quadrat, so einen Schuh lang und einen Schuh breit ist, u. s. w. Wenn nun die Seite AB z. E. in 4 gleiche Theile eingetheilet ist, oder 4 Schuhe hält; so ist klar, daß man finden kan, wie viel schuhige Quadrate oder Quadrat-Schuhe in dem grossen Quadrate ABCD enthalten sind, wenn man die Seite AB mit sich selbst multipliciret. Denn im grossen Quadrate müssen so viel Reihen der kleineren seyn, und in jeder Reihe so viel kleine Quadrate als die Seite AB Theile hat.

IV. 75.

Der

Der 1. Zusatz.

115. Wenn die Seite des Quadrats 10 ist, so wird der Inhalt desselben 100 seyn. Da nun eine Ruthe im Längen-Maasse 10 Schuhe hat, ein Schuh 10 Zoll u. s. w. so muß im Flächen-Maasse eine Quadrat-Ruthe 100 Schuhe, ein Quadrat-Schuh hundert Quadrat-Zolle u. s. w. haben.

Der 2. Zusatz.

116. Daher kan man eine gegebene Zahl gar leicht in Quadrat-Zolle, Quadrat-Schuhe, Quadrat-Ruthen resolviren, wenn man nur von der Rechten gegen die Lincke 2 Zahlen für die Zolle, 2 für die Schuhe abschneidet: denn das übrige bleibet für die Ruthen. Z. E. wenn man 119025 Zolle hat, so sind es 11 Ruthen, 90 Schuhe, 25 Zolle.

Die 32. Aufgabe.

IV. 76. 117. Ein Rectangulum ABCD auszumessen.

Auflösung.

1. Messet die Breite AB, ingleichen die Höhe BC.
2. Multipliciret jene durch diese, so kommet der verlangte Inhalt der Figur heraus.

Z. E. Es sey AB $= 3^{\circ}4'5''$

$$
\begin{array}{r}
AD = 123 \\
\hline
1035 \\
690 \\
345 \\
\hline
\end{array}
$$

so ist der Inhalt $= 4^{\circ}24'35''$

Beweiß.

Beweiß.

Der Beweiß ist eben wie in der vorhergehenden Aufgabe.

Der 18. Lehrsatz.

118. Zwey Parallelogramma ABCD und EF CD, die eine basin oder Grund-Linie CD und eine Höhe AC haben/ sind einander gleich. IV. 77.

Beweiß.

Weil AC = BD, EC = FD und AE = BF (§. 20. Geom. & §. 24. Arithm.); so ist △ AEC = △ BFD (§. 51), folgends, wenn man beyderseits den Triangel BEG wegnimmet, ABGC = EGDF (§. 25. Arithm.), addiret man nun beyderseits den Triangel CGD, so ist auch ABCD = ECDF (§. 24. Arithm.). W. Z. E.

Der 1. Zusatz.

119. Also müssen auch die Triangel, so gleiche Grund-Linien und Höhen haben, einander gleich seyn (§. 102).

Der 2. Zusatz.

120. Ein Triangel ist die Helffte des Parallelogrammi, wenn er mit ihm eine gleiche Grund-Linie hat und zwischen einerley Parallel-Linien stehet (§. 22).

Die 33. Aufgabe.

121. Den Inhalt eines Rhombi und Rhomboidis auszurechnen. IV. 78.

Auflösung.

1. Nehmet die eine Seite AB für die Grund-Linie an,

an, und lasset darauf aus C ein Perpendicul CE fallen (§. 69).

2. Multipliciret die Grund-Linie AB durch die Höhe CE; so kommet der verlangte Inhalt heraus.

Z. E. Es sey AB = 4 5 6''
CE = 2 3 4

1 8 2 4
1 3 6 8
9 1 2

so ist der Inhalt = 1 0° 6 7' 0 4''

Beweiß.

Der Rhombus oder Rhomboides ABCD ist gleich einem Rectangulo, dessen Grund-Linie AB, die Höhe aber CE ist (§. 118. 103). Nun findet man den Inhalt des Rectanguli, wenn man AB durch CE multipliciret (§. 117). Derowegen wird der Inhalt des Rhombi und Rhomboidis gleichfals gefunden, wenn man AB durch CE multipliciret. W. Z. E.

Die 34. Aufgabe.

122. Den Inhalt eines jeden Triangels zu finden.

Auflösung.

IV. 79.

1. Nehmet die Seite AB für die Grund-Linie an und lasset darauf aus C die Perpendicular-Linie CD fallen (§. 69).
2. Messet die Linien AB und CD und multipliciret sie durch einander.

3. Was

3. Was heraus kommet, dividiret durch 2; so habet ihr den Inhalt des Triangels.

Beweiß.

Wenn ihr AB durch CD multipliciret, so habet ihr den Inhalt eines Parallelogrammi, dessen Seiten AB und DC sind (§. 117. 121). Da nun der Triangel die Helffte von diesem Parallelogrammo ist (§. 120); so dörffet ihr den gefundenen Inhalt nur durch 2 dividiren um den Inhalt des Triangels zu haben. W: Z. E.

Anders.

Man darf nur die Grund-Linie AB durch die halbe Höhe CD, oder auch die Höhe CD durch die halbe Grund-Linie AB multipliciren, wenn man den Inhalt des Triangels haben will: wie aus beygesetztem Exempel zu ersehen.

AE $3^{\circ}4'2''$	AB $3^{\circ}4'2''$	$\frac{1}{2}$ AB $1^{\circ}7'1''$
CD 2 3 4	$\frac{1}{2}$CD 1 1 7	CD 2 3 4
1368	2394	684
1026	342	513
684	342	342
80028	40014 ACB	40014 ACB
2)		
40014 ACB		

Die 35. Aufgabe.

123. **Den Inhalt einer jeden geradelinichten Figur zu finden.** IV. 80.

Auflösung.

Weil jede Figur sich aus einem Winckel B durch

durch die Diagonal-Linien EB, BD in so viel Triangel zertheilen lässet, als Seiten sind weniger zwey, als z. E. das Fünff-Ecke ABCDE in drey Triangel ABE, BED und BCD; so darf man nur nach der vorhergehenden Aufgabe jeden Triangel besonders ausrechnen und sie hernach in eine Summe addiren.

Oder wenn zwey Höhen CF und EG auf eine Grund-Linie gezogen werden, so kan man das Trapezium EBCD auf einmahl finden, wenn man entweder die halbe Grund-Linie BD durch die Summe der Höhen EG und CF, oder die gantze Grund-Linie durch die halbe Summe der Höhen multipliciret.

Exempel.

$\frac{1}{2}$ BD = 4° 3′	$\frac{1}{2}$ BD = 4° 3′	$\frac{1}{2}$ EB 4° 2′
CF = 3 5	EG = 4 5	AH 3 0
215	215	△AEB 1260′
129	172	
△BCD = 1505′	△EBD = 1935′	
	△AEB = 1260	
	△BCD = 1505	
	Inhalt der Figur = 4700′	

Der 1. Zusatz.

IV. 81. 124. Ein reguläres Viel-Ecke kan aus dem Mittel-Puncte C des Circuls, darein es sich beschreiben lässet, in so viel gleiche Triangel als Seiten sind, eingetheilet werden. Denn die Grund-

Grund-Linien dieser Triangel AB, BE, EF &c. sind einander gleich (§. 21) und die Schenckel derselben AC, CB, CE, CF &c. gleichfals (§. 27). Derowegen sind auch die Triangel selbst einander gleich (§. 51). Wenn ihr nun den Inhalt eines von diesen Triangeln findet (§. 122) und denselben durch die Zahl der Seiten multipliciret, so kommet der Inhalt des Viel-Eckes heraus.

Z. E. $\frac{1}{2}$ AB = 2° 7′
DC = 29

243
54

△ ABC 783′
Zahl der Seiten 5

Inhalt des V Eckes = 39° 15′

Der 2. Zusatz.

125. Daher ist ein reguläres Viel-Ecke einem Triangel gleich, dessen Grund-Linie so groß ist wie die Peripherie des gantzen Viel-Eckes, die Höhe aber so groß als die Höhe CD eines von den Triangeln, in welche es aus dem Mittel-Puncte C zertheilet worden (§. 119). IV. 82.

Der 3. Zusatz.

126. Wenn man die Seiten des Viel-Eckes, so in einem Circul beschrieben worden, unendlich klein annimmet; so werden sie sich endlich in der Peripherie des Circuls verlieren. Und alsdenn wird die Höhe der Triangel CD mit dem Radio BC übereinkommen. Derowegen ist der Circul IV. 81.

einem Triangel gleich, dessen Grund-Linie so groß ist als die Peripherie des Circuls, die Höhe aber dem Radio desselben gleichet (§. 125).

Der 4. Zusatz.

IV. 83. 127. Der Ausschnitt eines Circuls ACB ist also einem Triangel gleich, dessen Grund-Linie so groß als der Bogen AB, die Höhe aber so groß als der Radius AC.

Der 5. Zusatz.

128. Wenn also die Peripherie und der Diameter eines Circuls gegeben werden, so kan man den Inhalt finden, wenn jene durch den vierdten Theil von diesem multipliciret wird.

Anmerckung.

129. Es haben sich von alten Zeiten her viele unterwunden die wahre Verhältniß des Diametri eines Circuls zu seiner Peripherie zu erfinden: allein es ist noch keinem gelungen/ unerachtet heute zu Tage die Kunst zu erfinden bey den Mathematicis sehr hoch gestiegen. Unterdessen haben sich einige mit gutem Fortgange bemühet eine Verhältniß auszurechnen/ die bey nahe zutrifft. Archimedes hat in seinem Büchlein von der Circul-Messung in dem anderen Lehrsatze zu erst erwiesen/ daß der Diameter eines Circuls zu seiner Peripherie sich beynahe verhalte wie 7 zu 22. Weil aber diese Verhältniß in grossen Circuln etwas zu viel bringet/ haben andere eine genauere gesuchet. Niemand aber hat sich in diesem Stücke mehr Mühe gegeben als Ludolph von Cölln / welcher endlich heraus gebracht/ daß/ wenn der Diameter des Circuls 100 000 000 000 000 000 000 ist/ die Peripherie bey nahe 314 159 265 358 979 323 846 sey. Allein da diese Zahlen im Rechnen viel zu weitläuftig sind/ nimmet man nur beyderseits die ersten drey Ziffern und setzet die Verhältniß des

des Diametri zu der Peripherie des Circuls wie 100 zu 314: in welcher Ptolomæus, Vieta, Hugenius und Ludolph von Cöln überein kommen. In kleinen Zahlen ist keine genauere Verhältniß / als die Adrianus Metius gegeben/ wie 113 zu 355. Der Beweiß folget unten in der Trigonometrie. Daß aber alle Diametri zu ihren Peripherien einerley Verhältniß haben / ist leicht zu begreiffen. Denn wenn in verschiedenen Circuln die Diametri zu ihren Peripherien verschiedene Verhältniß hätten; könten sie dadurch von einander unterschieden werden/ und daher unmöglich einander ähnlich seyn / welches doch oben erwiesen worden (§. 34).

Der 19. Lehrsatz.

130. **Der Inhalt des Circuls verhält sich zum Quadrat seines Diametri wie beynahe 785 zu 1000.**

Beweiß.

Wenn der Diameter 100 Theile hat, bekommet die Peripherie 314 (§. 129), also ist der Inhalt des Circuls 7850 (§. 128), das Quadrat des Diametri aber 10000 (§. 114): folgends verhält sich jener zu diesem wie 7850 zu 10000, das ist, wenn man beyderseits mit 10 dividiret, wie 785 zu 1000 (§. 59. Arithm.). W. Z. E.

Der 20. Lehrsatz

131. **Die Flächen der Circul verhalten sich gegen einander wie die Quadrate ihrer Diametrorum.**

Beweiß.

Wie die Fläche des einen Circuls zu dem Quadrate seines Diametri, so verhält sich die Fläche des anderen Circuls zu dem Quadrate seines

Diametri (§. 129. 130). Derowegen verhält sich auch die Fläche des einen Circuls zu der Fläche des andern wie das Quadrat des einen Diametri zu dem Quadrate des anderen (§. 83. Arithm.). W. Z. E.

Die 36. Aufgabe.

132. Es wird gegeben der Diameter des Circuls/ man soll die Peripherie finden.

Auflösung.

Suchet zu 100, 314 und dem gegebenen Diametro die vierdte Proportional-Zahl (§. 85. Arithm.). Diese ist die verlangte Peripherie (§. 129).

Es sey der Diameter 56'. Sprechet

100 — 314 — 56
56

1884
1570

17°5'8''4''' Peripherie des Circuls.

Die 37. Aufgabe.

133. Es wird gegeben die Peripherie des Circuls (17584'''), man soll den Diametrum finden.

Auflösung.

Suchet zu 314, 100 und der gegebenen Peripherie 17584''' die vierdte Proportional-Zahl (§. 85. Arithm.); so kommet der verlangte Diameter 56 heraus (§. 129).

314

314—100—17584

100

1758400

18

202

1758400 } $5^{\circ}6'0''0'''$ Diameter.

314444

3111

33

Die 38. Aufgabe.

134. **Es wird gegeben der Diameter (oder die Peripherie) des Circuls / man soll den Inhalt desselben finden.**

Auflösung.

1. Suchet erstlich die Peripherie (§. 132) oder den Diametrum (§. 133).
2. Multipliciret die Peripherie durch den vierdten Theil des Diametri (§. 128).

Z. E. Es sey der Diameter 5600''', so ist die Peripherie 17584''', folgends der Inhalt des Circuls 24617600'''.

Anders.

Multipliciret den Diametrum (56') durch sich selbst und suchet zu 1000, 785 und dem gefundenen Quadrate des Diametri 3136 die vierdte Proportional-Zahl 246176'' (§. 85. Arithm.); So habet ihr den verlangten Inhalt des Circuls (§. 130).

Die 39. Aufgabe.

135. **Es wird gegeben der Inhalt des Circuls/ man soll den Diametrum finden.**

Auflösung.

1. Suchet zu 785 und 1000 und dem gegebenen Inhalt des Circuls 246176'' die vierdte Proportional Zahl 313600 (§. 85. Arithm.)
2. Hieraus ziehet die Quadrat-Wurtzel 56 (§. 77. Arithm.), diese ist der verlangte Diameter (§. 130).

Zusatz.

136. Wollet ihr die Peripherie wissen, so könnet ihr, nachdem der Diameter bekandt worden, dieselbe durch die 36 Aufgabe (§. 132) suchen.

Die 40. Aufgabe.

IV. 83. 137. **Es wird gegeben der Radius des Circuls AC (6') und die Grösse des Bogens AB (6°), man soll den Inhalt des Ausschnittes oder Sectoris ABC finden.**

Auflösung.

1. Suchet zu 100, 314 und dem Radio AC (§. 85. Arithm.) die vierdte Proportional-Zahl 1884'''. Diese ist die halbe Peripherie (§. 132. Geom & § 59 Arithm.).
2. Suchet ferner zu 180°, dem gegebenen Bogen 6° und der gefundenen halben Peripherie 1884''' die vierdte Proportional-Zahl $62\frac{4}{5}''''$ (§. 85. Arithm.); so ist euch der Bogen AB in Linien bekandt.
3. Diese multipliciret durch den vierdten Theil des

des Diametri 300''', so kommet der Inhalt des Ausschnittes ABC 18840''' heraus (§. 122. 127).

Der 21. Lehrsatz.

138. **Wenn zwey Parallelogramma ABDC und BEFD einerley Höhe AC haben / verhalten sie sich gegen einander wie ihre Grund-Linien CD und DF; Hingegen wie ihre Höhen / wenn die Grund-Linien gleich sind.** IV. 84.

Beweiß.

Den Inhalt des Parallelogrammi AD bekommet man, wenn man seine Grund-Linie CD durch AC multipliciret; hingegen den Inhalt des Parallelogrammi BF, wenn seine Grund-Linie DF durch AC multipliciret wird (§. 117). Also verhalten sich die beyden Parallelogramma wie die Producte aus AC in CD und aus AC in DF, das ist, wie CD zu DF (§. 59. Arithm.): **welches das erste war.**

Auf eben solche Art wird erwiesen, daß, wenn die Grund-Linien gleich sind, die Parallelogramma sich wie die Höhen verhalten: **welches das andere war.**

Zusatz.

139. Weil jeder Triangel als die Helffte eines Parallelogrammi betrachtet werden kan (§. 120); so müssen auch die Triangel von gleicher Höhe sich wie ihre Grund-Linien; und die auf gleichen Grund-Linien wie ihre Höhen verhalten.

Die 41. Aufgabe.

V. 85. 140. **Ein Parallelogrammum ABEC aus einem gegebenen Puncte D in zwey gleiche Theile zu theilen.**

Auflösung.

Machet EF = AD und ziehet die Linie DF, so sind die beyden Trapezia ADFC und DBEF einander gleich.

Beweiß.

Die Triangel ABC und BCE sind einander gleich (§. 102). Weil AB = EC und diese Linien einander parallel (§. 102), über dieses AD = EF; so ist ferner o = x und y = u (§. 72) und FC = DB (§. 25. Arithm.). Derowegen ist auch △DBG = △GCF (§. 50), folgends das Trapezium ACFD dem Trapezio DFEB gleich (§. 24. 25. Arithm. W. Z. E.

Die 42. Aufgabe.

141. **Es wird gegeben der Inhalt eines Triangels (36′) und seine Grund-Linie (18′), man soll die Höhe finden.**

Auflösung.

Durch die halbe Grund-Linie (9′) dividiret den Inhalt des Triangels (36′), so kommet die Höhe (4′) heraus (§. 122).

Die 43. Aufgabe.

142. **Eine jede geradelinichte Figur in so viel Theile zu theilen / als man begehret.**

Auf-

Auflösung.

1. Rechnet den Inhalt der Figur aus (§. 123.) und theilet ihn in die begehrten Theile, z. E. in drey. V. 86.
2. Den Inhalt des Triangels AED ziehet von dem dritten Theile der Figur ab und was übrig bleibet, dividiret durch $\frac{1}{2}$ AD, so kommet die Höhe des Triangels ADI heraus, den man noch zu AED hinzusetzen muß, damit AEDI der dritte Theil der Figur wird (§. 141).
3. In der Weite dieser Höhe ziehet mit DA eine Parallel-Linie (§. 67), welche AB in I durchschneidet; so könnet ihr die Linie DI ziehen.
4. Halbiret den dritten Theil der Figur und dividiret die Helffte durch $\frac{1}{2}$ DI; so kommet die Höhe des Triangels DIK heraus, der dem sechsten Theile der Figur gleich ist.
5. In der Weite gedachter Höhe ziehet mit DI eine Parallel-Linie (§. cit.), damit sich der Punct K giebet.
6. Den sechsten Theil der Figur dividiret durch $\frac{1}{2}$ DK und mit der Weite des Quotienten ziehet wie vorhin eine Linie mit DK parallel, damit ihr den Punct L findet, und folgends die Linie LK ziehen könnet, welche den anderen Theil DIKL abschneidet, und zugleich den dritten LKBC giebet.

Z. E. Es sey AD 516″, AC 580″, EH 154″, BG 315″, DF 375″; so ist AED 39732″, ABC 91350″, ADC 108750″ und daher die gantze Figur

gur 239832″, der dritte Theil 79944″, der sechste 39972″, die Höhe des △ DIA 156″ des △ DIK 151″, und des △ DKL 139″, indem ½ DI 265″, ½ DK 287″.

Anmerckung.

143. Wenn die Eintheilung auf dem Papiere geschehen, so werden auf dem Felde die Puncte I, K und L durch die Grösse der Linien AI, IK und DL leicht gefunden.

Der 22. Lehrsatz.

V. 87. 144. **In einem rechtwinckelichten Triangel ABC ist das Quadrat ACFG der grösten Seite AC den Quadraten BCED und ABIH der beyden übrigen Seiten BC und AB gleich.**

Beweiß.

Man ziehe die Linien AE und BF, ingleichen BK mit AG parallel (§. 67). Weil der Triangel BCF mit dem Rectangulo LCFK eine Grundlinie CF hat und mit ihm zwischen den beyden Parallel-Linien CF und BK stehet, so ist er die Helffte von denselben (§. 120). Eben so weil der Triangel ACE mit dem Quadrate BCED eine Grund-Linie CE hat und zwischen den beyden Parallel-Linien AD und CE stehet, so ist er die Helffte von demselben (§. 120). Nun ist CF = AC und BC = CE (§. 20), und der Winckel ACE dem Winckel BCF gleich (§. 24. Arithm.), weil nemlich ACF = BCE = 90° (§. 20. 37). Derowegen sind die gantzen Triangel ACE und BCF (§. 49), folgends auch das Quadrat BDEC und das Rectangulum LCFK einander gleich (§. 26. Arithm.).

Da nun auf gleiche Weise erwiesen wird, daß das

das Quadrat AHIB dem Rectangulo ALKG gleich sey; so ist klar, daß die beyden Quadrate AHIB und BCDE zusammen genommen dem Quadrate AGFC gleich sind. W. Z. E.

Anmerckung.

145. Dieser Lehrsatz wird von seinem Erfinder Pythagora der Pythagorische Lehrsatz und wegen seines vortrefflichen Nutzens durch die gantze Mathematic von einigen Magister Matheseos genennet.

Die 44. Aufgabe.

146. **Ein Quadrat zu machen/ welches so groß ist wie zwey oder mehrere andere zusammen genommen.**

Auflösung.

1. Setzet die Seiten der beyden Quadrate AB und BC rechtwinckelicht zusammen (§. 70. 89). V. 88.
2. Ziehet die Linie AC, so habet ihr die Seite des Quadrates, welches so groß ist wie die anderen beyde zusammen (§. 144).
3. Richtet CE = AC auf die Seite des dritten Quadrates CD perpendicular auf, und
4. Ziehet die Linie DE, so habet ihr die Seite eines Quadrates, welches so groß ist als die drey Quadrate zusammen (§. 144) u. s. w.

Der 23. Lehrsatz.

147. **Wenn in geradelinichten Figuren die gleichnahmige Winckel einander gleich sind und die Linien/ so sie einschliessen/ beyderseits einerley Verhältniß haben; so sind sie einander ähnlich: und wenn sie ähn-**

ähnlich sind / so hat es mit den Winckeln und Linien die gemeldete Beschaffenheit.

Beweiß.

Die geradelinichte Figuren können nicht anders als durch die Grösse der gleichnahmigen Winckel und durch die Verhältniß der Seiten, so sie einschliessen, von einander unterschieden werden: denn sonst lässet sich nichts deutlich in ihnen begreiffen. Wenn nun die Winckel einerley Grösse und die Seiten, so sie einschliessen, einerley Verhältniß haben, so kommen die Sachen überein, wodurch sie von einander unterschieden sind. Derowegen sind sie einander ähnlich (§. 4): **welches das erste war.**

Wenn zwey Figuren einander ähnlich sind, so kommen die Sachen mit einander überein, wodurch sie von einander zu unterscheiden sind (§. 4). Nun werden die geradelinichten Figuren durch die Grösse der gleichnahmigen Winckel und die Verhältniß der Seiten, so sie einschliessen, unterschieden. Derowegen muß die Grösse der Winckel und die Verhältniß der Seiten beyderseits einerley seyn: **welches das andere war.**

Der 24. Lehrsatz.

V. 89. 148. **Wenn in zweyen Triangeln** BAC **und** DFE, B=D **und** C=E; **so ist** BA : AC = DF : FE **und** AB : BC = FD : DE **und wenn hingegen die Seiten proportional sind / so sind auch die gleichnahmigen Winckel gleich.**

Beweiß.

Beweiß.

Weil B = D und C = E, und aus zwey gegebenen Winckeln und einer Seite sich der Triangel beschreiben lässet (§. 60); so werden die Triangel ABC und EDF auf gleiche Art erzeuget. Derowegen sind sie einander ähnlich (§. 33); folgends BA : AC = FD : FE und AB : BC = FD : DE (§. 147): **welches das erste war.**

Weil im anderen Falle die drey Seiten des einen Triangels proportional sind den drey Seiten des anderen, und aus drey Seiten sich ein Triangel beschreiben lässet (§. 55); so werden die Triangel ABC und FDE auf gleiche Art erzeuget. Derowegen sind sie einander ähnlich (§. 33), und also die gleichnahmigen Winckel einander gleich (§. 147): **welches das andere war.**

Der 25. Lehrsatz.

149. **Wenn in einem Triangel** ABC **eine Linie** DE **mit der Grund-Linie** BC **parallel gezogen wird / so verhält sich** AD **zu** AE **wie** AB **zu** AC **und wie** BD **zu** EC, **auch** AD : DE = AB : BC. V. 89.

Beweiß.

Weil DE mit BC parallel; so ist o = x und u = y (§. 72), daher AD : AE = AB : AC und AD : DE = AB : BC (§. 148), folgends weil AD : AB = AE : AC (§. 83. Arithm.), AD : AE = BD : EC. W. Z. E.

Die

Die 45. Aufgabe.

V. 90. **150. Zu zwey gegebenen Linien AC und AB die dritte Proportional-Linie zu finden.**

Auflösung.

1. Machet nach Gefallen einen Winckel EAD und
2. Traget aus A in C die Linie AC; aus A in B, ingleichen aus C in E die Linie AB.
3. Ziehet von B in C eine gerade Linie CB und aus E die Linie DE mit CB parallel, welches geschiehet, wenn ihr (§.48) den Winckel E dem Winckel C gleich machet (§.73); so ist BD die verlangte dritte Proportional-Linie (§.149).

Die 46. Aufgabe.

V. 91. **151. Zu drey gegebenen Linien AB, AC und BD die vierdte Proportional-Linie zu finden.**

Auflösung.

1. Machet nach Belieben einen Winckel EAD.
2. Traget aus A in B die Linie AB, aus A in C die Linie AC und aus B in D die Linie BD.
3. Von B in C ziehet eine gerade Linie, und
4. Aus D eine andere DE mit CB parallel, wie in der vorhergehenden Aufgabe: so ist CE die verlangte vierdte Proportional-Linie (§.149).

Der 26. Lehrsatz.

V. 89. **152. Wenn in zweyen Triangeln ABC und FDE, B = D und AB : BC = FD : DE; so ist auch A = F und C = E, und BA : AC = DF : FE.**

Beweiß.

Beweiß.

Weil B = D und AB : BC = FD : DE, und aus einem Winckel mit den beyden Seiten, die ihn einschliessen, sich ein Triangel beschreiben lässet (§. 58); so werden die Triangel ABC und FDE auf gleiche Art erzeuget. Derowegen sind sie einander ähnlich (§. 33); folgends A = F, C = E und BA : AC = DF : FE (§. 147). W. Z. E.

Anmerckung.

153. Die Lehrsätze von der Aehnlichkeit der Triangel sind von den nützlichsten in der gantzen Mathematick, und dienen zu den meisten Erfindungen, die man in derselben haben kan. Auch die vornehmste Ausübung der Geometrie auf dem Felde beruhet auf denselben, wie bald mit mehrerem erhellen soll.

Die 47. Aufgabe.

154. **Eine gerade Linie AB in so viel gleiche Theile zu theilen, als man verlanget.** V. 92.

Auflösung.

1. Traget nach Belieben auf eine Linie CD so viel gleiche Theile, als die Linie AB bekommen soll, z. E. fünffe.
2. Setzet auf CD einen gleichseitigen Triangel CED (§. 53).
3. Traget aus E in A und aus E in B die Linie AB.
4. Endlich ziehet gegen den ersten Theilungs-Punct G aus der Spitze des Triangels E die Linie

Linie EG, so ist AF der fünfte Theil von der gegebenen Linie AB.

Beweiß.

Weil EA : EB = EC : ED; so ist A = C und EA : AB = EC : CD (§. 152). Nun ist EC = CD: derowegen ist auch EA = AB. Weil nun ferner EA : AF = EC : CG (§. 148), das ist, AB : AF = CD : CG und CG = $\frac{1}{5}$ CD, so ist auch AF = $\frac{1}{5}$ AB (§. 53. Arithm.). W. Z. E.

Die 48. Aufgabe.

V. 93. 155. **Eine gerade Linie AB nach der Proportion einzutheilen / nach welcher eine andere CD eingetheilet worden.**

Auflösung.

1. Beschreibet auf die eingetheilete Linie CD einen gleichseitigen Triangel (§. 53).
2. Traget aus E in A und B die gegebene Linie AB.
3. Ziehet aus der Spitze des Triangels E an die Theilungs-Puncte G, I, die Linien EG, EI. Diese theilen die gegebene Linie AB in F und H nach der gehörigen Proportion.

Beweiß.

Der Beweiß ist wie in der vorhergehenden Aufgabe.

Anmerckung.

156. Diese Aufgabe hat viel Nutzen in der Bau-Kunst und Fortification/ sonderlich wenn man einen vorgegebenen Riß nach Belieben vergrösseren oder verkleineren soll.

Die

Die 49. Aufgabe.

157. **Ein** Parallelogrammum, **ingleichen einen Triangel in so viel gleiche Theile zu theilen/ als man verlanget.** VI. 106. 107.

Auflösung.

1. Theilet die Grund-Linie CD oder CB in so viel gleiche Theile als die Figur eingetheilet werden soll (§. 154).
2. Ziehet aus den Theilungs-Puncten 1.2. in dem ersten Falle mit der anderen Seite AC Parallel-Linien 1.1 und 2.2 (§. 67); in dem anderen Falle aber Linien bis an die Spitze des Triangels A 1 und A 2: so sind beyde Figuren in gleiche Theile getheilet (§. 138. 139).

Die 50. Aufgabe.

158. **Zwischen zwey gegebenen Linien** AB **und** BE **eine mittlere Proportional-Linie zu finden.** VI. 108.

Auflösung.

1. Traget die gegebene Linien AB und BE auf eine an einander und theilet sie in C in zwey gleiche Theile (§. 90).
2. Beschreibet aus C mit CA einen halben Circul.
3. Richtet aus B die Perpendicular-Linie BD auf (§. 70). Diese ist die verlangte mittlere Proportional-Linie.

Beweiß.

Der Winckel ADE ist ein rechter Winckel (§. 86): ABD ist auch ein rechter Winckel (§. 18). Der Winckel DAB ist beyden Triangeln DAB und DAE (*Auszug*). I ge-

gemein. Derowegen ist auch der Winckel ADB dem Winckel DEB gleich (§. 78). Nun ist in dem Triangel DEB der Winckel DBE auch ein rechter Winckel (§. 18). Derowegen verhält sich AB zu BD wie BD zu BE (§. 148). W. Z. E.

Die 1. Anmerckung.

159. Wenn man für 1 eine Linie annimmet und nach derselben eine gegebene Zahl durch eine andere Linie exprimiret/ so kan man durch diese Aufgabe vermittelst des verjüngten Maaß-Stabes die Quadrat-Wurtzel ausziehen (§. 74. Arithm.).

Die 2. Anmerckung.

160. Eben auf diese Art kan man durch die 46. Aufgabe (§. 151) die Regel Detri in Linien verrichten.

Die 51. Aufgabe.

VI. 109. 161. **Aus der gegebenen Sehne eines Bogens AB und dessen Höhe DF den Diametrum ED, und folgends den Mittel-Punct des Circuls C zu finden.**

Auflösung und Beweiß.

1. Suchet zu FD und FB die dritte Proportional-Linie (§. 85. Arithm.), so habet ihr EF (§. 158).
2. Addiret zu FE die Höhe des Bogens DF, so habet ihr den Diametrum ED.
3. Theilet denselben in 2 gleiche Theile, so habet ihr den Radium EC und folgends den Mittel-Punct C.

Z. E.

Z. E. Es sey DF 8′3″ FB 1°6′6″

```
83 - 166   - 166
     166      4
    ----     22
     996    366
    996     27556 )  332″ EF
   166      8333  )   83  DF
   -----     88      ------
   27556              415″
                   2) ------
                    2075‴ EC
```

Anmerckung.

162. Diese Aufgabe hat ihren Nutzen in der Bau-Kunst, wenn man die Eröfnung der Thüren und Fenster mit Bögen schliessen soll.

Die 52. Aufgabe.

163. Aus der gegebenen Sehne eines Bogens AB und seiner Höhe DF den Inhalt des Abschnittes ADBFA zu finden. VI. 109.

Auflösung.

1. Suchet zu erst den Diametrum des Zirckels DE (§. 160).
2. Beschreibet damit einen Circul und traget die Sehne AB darein.
3. Messet den Winckel ACB mit dem Transporteur (§. 43) und
4. Suchet alsdenn den Ausschnitt ACBDA (§. 137).
5. Aus der gegebenen Sehne AB und dem Unterscheide FC zwischen der Höhe des Bogens DF

und dem Radio DC suchet den Inhalt des Triangels ACB (§. 122).

6. Endlich ziehet den Triangel ACB von dem Ausschnitte ACBDA ab, so bleibet der Abschnitt ADBFA übrig.

Z. E. Es sey AB 600''', DF 80''', so ist DE 1205''', der Bogen AB 60°, und daher der Ausschnitt ACBDA 189630'''. Da nun FC 522''', AF 300''; so ist △ ACB 156600''', folgends der Abschnitt AFBDA 33030'''.

Die 53. Aufgabe.

V. 94. 164. **Einen verjüngten Maaß-Stab zu verfertigen.**

Auflösung.

1. Ziehet eine Linie AE und traget darauf 10 gleiche Theile von beliebter Grösse aus A in B, und denn ferner den Raum AB, so vielmahl euch beliebet.
2. Richtet in A von gefälliger Länge eine Perpendicular-Linie AC auf (§. 70), und theilet sie in 10 gleiche Theile.
3. Durch jeden Theilungs-Punct ziehet mit AE eine Parallel-Linie (§. 67) und
4. Traget auf die obere CD eben die Theile, welche sich auf AB befinden.
5. Ziehet oben 10 und unten 9, oben 9 und unten 8, oben 8 und unten 7, oben 7 und unten 6 u. s. w. mit geraden Linien zusammen.

Ich sage, wenn AB eine Ruthe ist, so sind die Theile B 1, 1. 2, 2. 3 u. s. w. Schuhe: Hingegen

9.9 ein Zoll, 8.8 zwey Zoll, 7.7 drey Zoll, 6.6 vier Zoll u. s. w.

Beweiß.

Weil 10 Schuhe eine Ruthe machen (§. 9), so ist klar, daß die Theile auf der Linie AB Schuhe sind. Daß aber 9.9 ein Zoll, 8.8 zwey Zoll, 7.7 drey Zoll sind, u. s. w. erweiset man also. Dieweil 9.9 mit C 9 parallel ist, so verhält sich wie A 9 zu AC, so 9.9 zu C 9 (§. 149). Nun ist A 9 = $\frac{1}{10}$ AC. Derowegen ist auch 9.9 = $\frac{1}{10}$ C 9, folgends ein Zoll (§. 9), u. s. w. W. Z. E.

Zusatz.

165. Wenn man nun den Zirckel auf die dritte oder siebende Linie setzet, und ihn biß zu der Linie aufthut, die unten aus dem fünfften Schuhe gezogen ist; so hat man über 5 Schuhe noch 3 oder 7 Zoll, u. s. w.

Die 54. Aufgabe.

166. **Die Weite zweyer Oerter A und B zu finden, zu denen beyden man aus einem angenommenen Stande kommen kan.** V. 95.

Auflösung.

1. Setzet das Meß-Tischlein in D und erwehlet auf demselben einen Punct c.
2. Von demselben visiret durch die Dioptern in A und ziehet die Linie ca.
3. Gleichergestalt visiret in B und ziehet die Linie cb.
4. Messet mit der Ruthen die Linien cA und cB, und

5. Traget dieselben von dem verjüngten Maaß-Stabe (§. 164) aus c in a und b. Endlich
6. Messet die Linie ab auf dem verjüngten Maaß-Stabe, so habet ihr die Grösse der verlangten Weite AB.

Beweiß.

Denn weil der Winckel c beyden Triangeln acb und AcB gemein ist, und die Seiten, so ihn einschliessen, proportional sind; so kan ich auch sagen, wie ca zu cA, so verhält sich ab zu AB (§. 152). Nun hält ca so viel auf dem verjüngten Maaß-Stabe als cA auf dem grossen: Derowegen muß auch ab so viel auf dem verjüngten Maaß-Stabe halten, als AB auf dem grossen. W. Z. E.

Eine andere Auflösung.

1. Setzet das Instrument in D und messet den Winckel AcB (§. 43).
2. Messet ferner die Linien cA und cB (§. 44).
3. Construiret durch Hülffe des Transporteurs und verjüngten Maaß-Stabes einen Triangel acb (§. 58).
4. Messet die Linie ab auf dem verjüngten Maaß-Stabe (§. 164); so wisset ihr, wie viel Ruthen, Schuhe und Zolle die Linie AB hält.

Beweiß.

Der Beweiß ist eben so wie in der ersten Auflösung.

Die 55. Aufgabe.

V. 96. 167. **Die Weite zweyer Oerter A und B** zu

zu messen / zu deren einem A man nur kommen kan.

Auflösung.

1. Setzet das Meß-Tischlein in einem nach Belieben erwehlten Stand C und visiret aus dem Puncte c nach beyden Oertern A und B.
2. Messet die Weite eures Standes C von dem Orte A, zu welchem ihr kommen könnet, und
3. Traget sie von dem verjüngten Maaß-Stabe (§. 164) aus c in a.
4. Gehet mit eurem Tischlein biß in A und setzet es dergestalt nieder, daß der Punct a in A stehet, und ihr durch die Dioptern nach der Linie ac den in C eingesteckten Stab sehen könnet.
5. Visiret hierauf durch dieselben aus a in B und ziehet die Linie ab.
6. Endlich messet diese Linie ab auf dem verjüngten Maaß-Stabe (§. 164): so erkennet ihr die Grösse der verlangten Weite AB.

Beweiß.

Weil der Winckel c = C und a = A; so verhält sich wie ac zu AC so ab zu AB (§. 148). Nun hat ac so viel Theile von dem kleinen Maaß Stabe als AC von dem grossen: Derowegen muß auch ab so viel Theile von dem kleinen, als AB von dem grossen haben. W. Z. E.

Eine andere Auflösung.

1. Messet mit dem Instrumente die Winckel C

 und

und A (§. 43) und mit der Ruthen die Linie AC (§. 44).

2. Construiret daraus durch Hülffe des Transporteurs und verjüngten Maaß-Stabes einen Triangel acb (§. 60).

3. Messet auf dem verjüngten Maaß-Stabe die Linie ab, so wisset ihr die verlangte Weite AB.

Beweiß.

Der Beweiß ist wie vorhin.

Die 56. Aufgabe.

V. 97. **168. Die Weite zweyer Oerter AB, zu deren keinem man kommen kan, zu messen.**

Auflösung.

1. Erwehlet zwey Stände in C und D. In den einen C setzet das Tischlein, in den anderen stecket einen Stab.

2. Aus dem Puncte c visiret durch die Diopteren nach dem Stabe D, ingleichen nach B und A, und ziehet dahin zu auf dem Tischlein Linien.

3. Messet die Weite der beyden Stände CD (§. 44) und traget sie nach dem verjüngten Maaß-Stabe (§. 164) auf das Tischlein aus c in d.

4. Stecket in C einen Stab, und setzet das Tischlein dergestalt in D, daß der Punct d in D kommet, und wenn ihr nach der Linie cd durch die Diopteren visiret, ihr den Stab in C erblicket.

5. Visiret ferner aus d gegen A und B, und ziehet auf dem Tischlein die Linien da und db.

6. Endlich messet (§. 164) auf dem verjüngten

Maaß-

Maaß-Stabe ab, so habet ihr die Länge der Weite AB.

Beweiß.

Weil der Winckel d beyden Triangeln dcb und DCB gemein, über dieses auch der Winckel c dem Winckel C gleich ist; so verhält sich cd zu CD wie bc zu BC (§. 148). Wiederum weil aus gleichmäßiger Ursache der Triangel acd dem Triangel ACD ähnlich ist; so verhält sich cd zu CD wie ac zu AC (§. 148), folgends ist auch bc zu BC wie ac zu AC (§. 57. Arithm.). Da nun über dieses der Winckel acb dem Winckel ACB gleich ist, so verhält sich ab zu AB wie ac zu AC (§. 152) oder cd zu CD (§. 57. Arithm.). Da nun dc so viel Theile auf dem verjüngten Maaß-Stabe als DC im Grossen hat; so muß auch ab so viel Theile auf dem verjüngten Maaß-Stabe als AB im Grossen haben. W. Z. E.

Eine andere Auflösung.

1. Messet aus dem ersten Stande C die Winckel x und y, und aus dem Stande D die Winckel z und w, (§. 43) so geben ihre Summen die Winckel ACD und BDC. VI. 98.
2. Messet ferner die Stand-Linie CD (§. 44).
3. Traget diese nach dem verjüngten Maaß-Stabe auf das Papier, und construiret mit Hülffe der Winckel x und z + w den Triangel BCD und mit Hülffe der Winckel z und x + y den Triangel ACD (§. 60).
4. Endlich messet auf dem verjüngten Maaß-

Stabe die Linie AB, so wisset ihr die verlangte Weite.

Beweiß.

Der Beweiß ist einerley mit dem vorigen.

Anmerckung.

169. Auf gleiche Art kan man die Weite gar vieler Oerter auf einmahl messen/ wenn man neinlich aus zweyen Ständen gegen jeden visiret.

Die 57. Aufgabe.

V. 99. **170. Die Höhe eines Ortes AB zu messen/ zu dem man kommen kan.**

Auflösung.

1. Erwehlet euch einen Stand in D und richtet das Tischlein vertical, doch so, daß seine untere Seite horizontal sey: welches vermittelst einer Bleywage gar leicht geschehen kan.
2. Die Regel mit den Diooptern leget an dasselbe horizontal, visiret nach dem Orte, dessen Höhe ihr messen wollet, und ziehet die Linie cE.
3. Kehret an dem Puncte c die Regel mit den Diooptern in die Höhe, biß ihr die Spitze A erblicket, und ziehet auf dem Tischlein die Linie cb.
4. Messet die Stand-Linie cC (§. 44) und
5. Traget sie von dem verjüngten Maaß-Stabe auf das Tischlein aus c in E (§. 164).
6. Richtet in E ein Perpendicul Eb auf (§. 70) und
7. Messet seine Länge auf dem verjüngten Maaß-Stabe (§. 164), so wisset ihr die Höhe CA.
8. Dazu addiret die Höhe BC, so kommet die verlangte Höhe AB heraus.

Be-

Beweiß.

Der Winckel c ist beyden Triangeln Ecb und CcA gemein: bey E und C sind rechte Winckel; also verhält sich Ec zu cC wie bE zu AC (§. 148). Nun hält Ec so viel auf dem verjüngten Maaß-Stabe wie cC auf dem grossen. Derowegen muß auch Eb so viel auf dem verjüngten Maaß-Stabe wie AC auf dem grossen halten. W. Z. E.

Eine andere Auflösung.

1. Messet den Winckel E (§. 43) und die Stand-Linie AD oder CE (§. 44). VI. 100.
2. Construiret daraus einen rechtwinckelichten Triangel ebc (§. 60).
3. Messet die Höhe bc auf dem verjüngten Maaß-Stabe, so habet ihr die Höhe BC.
4. Dazu addiret die Höhe des Stativs, so kommet die Höhe AB heraus.

Beweiß.

Der Beweiß ist wie der vorige.

Anmerckung.

171. Man setzet voraus/ daß die Linie AD horizontal sey: denn wenn das Instrument an einem erhabeneren oder auch niedrigeren Orte stünde/ als die Höhe BA gelegen; so ist es rathsamer/ daß man auch den Winckel CEA misset/ und den Triangel CEA im kleinen construiret.

Die 58. Aufgabe.

172. **Eine Höhe AB zu messen / zu der man nicht kommen kan.**

Auflösung.

1. Erwehlet 2 Stände in D und E, und visiret wie in der vorhergehenden Aufgabe nach der Spi- VI. 101.

Spitze A und dem Puncte C, in dem ersten Stande D.

2. Messet die Stand-Linie ED und traget sie aus f, so über dem Puncte D stehen muß, in e von dem verjüngten Maaß-Stabe (§. 164).

3. Traget das Tischlein in E dergestalt, daß der Punct e über E kommet und visiret wie vorhin nach dem Stabe in D und der Spitze A.

4. Wo die Linie ea die Linie fa durchschneidet, lasset ein Perpendicul ac auf fc herunter fallen (§. 69).

5. Diesen messet auf dem verjüngten Maaß-Stabe (§. 164); so habet ihr die Höhe AC.

6. Addiret dazu die Höhe BC, so habet ihr die verlangte Höhe AB.

Beweiß.

Der Beweiß ist eben so wie in der vorigen Aufgabe.

Eine andere Auflösung.

VI. 101. 1. Messet in dem ersten Stande D den Winckel f und in dem anderen E den Winckel e (§. 43) und die Stand-Linie ED (§. 44).

VI. 102. 2. Diese traget auf das Papier nach dem verjüngten Maaß-Stabe (§. 164) und

3. Construiret darauf durch Hülffe der Winckel e und f einen Triangel fea (§. 60).

4. Verlängert seine Grund-Linie fe in c und lasset von a ein Perpendicul ac herunter fallen (§. 69).

5. Endlich messet ac auf dem verjüngten Maaß-Stabe (§. 164) und addiret dazu die Höhe des

Jn-

Instruments, damit ihr die Winckel gemessen, oder nehmet in acht, was (§. 171) erinnert worden: so kommet die verlangte Höhe AB heraus.

Beweiß.

Der Beweiß ist wie in der vorhergehenden Aufgabe.

Die 59. Aufgabe.

173. **Eine jede geradelinichte Figur** ABCDE, **in die man kommen kan, in Grund zu legen.** VI. 103.

Auflösung.

Messet den gantzen Umfang der Figur AB, BC, CD, DE, EA; ingleichen die Diagonal-Linien AC und AD, so könnet ihr nach dem verjüngten Maaß-Stabe (§. 164) die Figur auf dem Papiere aufzeichnen (§. 111).

Beweiß.

Wenn man eine Figur in Grund leget, so muß man eine kleine Figur zeichnen, in der alle Winckel so groß sind als in der grossen und die Seiten sich eben so gegen einander verhalten wie in der grossen. Wenn man nun für jede Seite der Triangel ABC, ACD, ADE auf dem verjüngten Maaß-Stabe so viel annimmet als sie im Grossen ausmachet, so verhalten sich die Seiten in der verjüngten Figur eben so gegen einander wie die Seiten der grossen. Denn wenn z. E. AB im grossen 6 ist, so ist sie im kleinen auch 6; wenn im grossen BC 7 ist, so ist sie im kleinen auch 7. Und also verhält sich AB zu BC bey-

beyderseits wie 6 zu 7. Derowegen sind auch die Winckel der kleinen Figur so groß wie die Winckel in der grossen (§. 148). Da nun die Winckel der Figur mit den Winckeln der Triangel übereinkommen; so müssen auch alle Winckel in der verjüngten Figur so groß seyn wie in der grossen. W. Z. E.

Anders.

VI. 104.

1. Erwehlet euch innerhalb der Figur einen Punct F und setzet dahin das Meß-Tischlein.
2. Aus F visiret gegen die Stäbe, welche man in die Ecken der Figur A, B, C, D, E gestecket und ziehet die Linien Fa, Fb, Fc, Fd, Fe.
3. Messet die Linien FA, FB, FC, FD, FE (§. 44) und
4. Eben so groß machet nach dem verjüngten Maaß-Stabe (§. 164) die Linien Fa, Fb, Fc, Fd, Fe.
5. Endlich ziehet die Linien ab, bc, cd, de und ea; so schliesset sich die verlangte Figur.

Beweiß.

In dem Triangel aFb verhält sich Fa zu Fb wie FA zu FB im Triangel AFB und der Winckel F ist beyden Triangeln gemein: derowegen verhält sich auch Fb zu FB wie ba zu BA (§. 152). Eben so wird erwiesen, es verhalte sich wie Fb zu FB so bc zu BC, folgends auch ba zu bc wie AB zu BC (§. 57. Arithm.). Es ist aber auch der Winckel ABC, so groß wie der Winckel abc (§. 152). Da nun auf gleiche Weise von allen übrigen Winckeln c, d, e, a er-

erwiesen werden kan, daß sie den Winckeln C, D, E, A gleich sind, und auch von den übrigen Seiten, daß sie sich gegen einander verhalten wie die Seiten CD, DE, EA; so ist klar, daß die grosse Figur in Grund geleget worden.

Anders.

1. Messet aus F alle Winckel AFB, BFC, CFD, DFE, EFA (§. 43), ingleichen die Linien FA, FB, FC, FD und FE (§. 44).
2. Traget die Winckel auf das Papier (§. 48), ingleichen die Linien nach dem verjüngten Maaß-Stabe (§. 164).
3. Ziehet die Linien ab, bc, cd, ed und ea; so wird die verlangte Figur geschlossen.

Beweiß.

Der Beweiß ist eben wie der vorige.

Die 60. Aufgabe.

174. **Eine Figur ABCDE in Grund zu legen, die man aus zweyen Oertern A und B gantz übersehen kan.** VI. 105.

Auflösung.

1. Setzet euer Tischlein in A und visiret nach allen Ecken der Figur B, C, D und E und ziehet gegen dieselbe Linien aus dem Puncte A.
2. Messet die Stand-Linie AB (§. 44) und traget sie nach dem verjüngten Maaß-Stabe (§. 164) auf das Tischlein aus A in b.
3. Traget das Tischlein aus A in B und richtet es dergestalt, daß der Punct b in B kommet und ihr durch die Dioptern des an die Linie bA angeleg-

legten Lineals den in A eingesteckten Stab sehen könnet.

4. Visiret nach allen übrigen Ecken der Figur und ziehet gegen dieselbe aus b Linien, welche die vorigen in e, d, c durchschneiden.

5. Endlich ziehet die Linien ed, dc; so habet ihr die verlangte Figur in Grund geleget.

Beweiß.

Der Beweiß ist fast eben wie in der 56 Aufgabe (§. 168).

Anders.

1. Messet aus A die Winckel CAB, DAC, EAD (§. 43), ingleichen die Linie AB (§. 44), wie nicht weniger aus B die Winckel EBA, EBD, DBC (§. 43).

2. Ziehet auf dem Papiere eine Linie ab und traget von dem verjüngten Maaß-Stabe die Grösse der Linie AB darauf (§. 164).

3. Traget in bac, cad, dae die Winckel CAB, DAC und EAD: hingegen in abe, ebd, dbc die Winckel ABE, EBD, DBC (§. 48).

4. Endlich ziehet die Puncte a, e, d, c, b mit geraden Linien zusammen; so habet ihr die verlangte Figur in Grund geleget.

Beweiß.

Der Beweiß ist abermahls wie in der 56 Aufgabe (§. 168).

Die 61. Aufgabe.

175. **Eine Figur ABCDE in Grund zu legen, die man ganz umgehen kan.**

Auf-

Auflösung.

1. Setzet das Tischlein in A und visiret nach den Stäben in B und E, damit ihr den Winckel BAE darauf bekommet. VI. 105.
2. Messet die Linien AB und AE (§. 44) und traget sie nach dem verjüngten Maaß-Stabe (§. 164) auf das Tischlein aus a in b.
3. Gehet mit dem Tischlein in B und setzet den Punct b in B, visiret wieder zurücke in A, ingleichen von dem neuen Puncte B in C, damit ihr den Winckel CBA auf das Tischlein bekommet.
4. Messet die Linie BC (§. 44) und traget sie auf das Tischlein aus b in c (§. 164).
5. Wenn ihr die gantze Figur dergestalt umgehet, so werdet ihr sie in Grund geleget haben.

Beweiß.

Denn alle eure Winckel in der kleinen Figur sind den Winckeln in der grossen gleich, und die Linien verhalten sich in der kleinen Figur eben so wie in der grossen: derowegen ist die kleine Figur der grossen ähnlich (§. 147). W. Z. E.

Anders.

Messet alle Seiten der Figur (§. 44) und drey Winckel weniger als Seiten sind (§. 43), so könnet ihr die Figur in Grund legen (§. 112).

Die 62. Aufgabe.

176. **Ein jedes Feld/oder einen jeden andern Platz auszurechnen.**

Auflösung.

1. Leget es zuerst in Grund, nach **den vorhergehenden Aufgaben.** Darnach

2. Rechnet die Figur aus, nach der 35. Aufgabe (§. 123).

Die 15. Erklärung.

VI. 110. 177. Wenn ein halber Circul X sich um seinen Diameter AB herum beweget / beschreibet er eine Kugel.

Zusatz.

178. Also sind alle Puncte in der Kugel-Fläche von dem Mittel-Puncte gleichweit entfernet (§. 13).

Die 16. Erklärung.

VI. 111. 179. Wenn eine geradelinichte Figur ABC sich an einer geraden Linie AD dergestalt herunter beweget, daß sie sich immer parallel bleibet / beschreibet sie ein PRISMA: VI. 112. beweget sich aber ein Circul X an einer geraden Linie FG gleichergestalt herunter / VI. 113. oder ein Rectangulum ABCD und Qvadrat um seine Höhe BC / so wird ein Cylinder oder eine Walze beschrieben.

Der 1. Zusatz.

180. Ein jedes Prisma hat zwey gleiche Grund-flächen und ist um und um von so vielen Vier-Ecken eingeschlossen als die Grund-Fläche Seiten hat.

Der 2. Zusatz.

181. In dem Prismate und Cylinder sind alle Durchschnitte, die mit ihren Grund-Flächen parallel geschehen, einander gleich.

Die 17. Erklärung.

VII. 105. 182. Wenn sich ein Rectangulum ABCD an einer Linie AE auf gleiche Art herunter be-

weget/ bekommet man ein PARALLELEPIPEDUM: ein Qvadrat O an einer Linie HJ/ die seiner Seite gleich ist/ herunter beweget/ zeuget einen CUBUM oder Würffel.

Der 1. Zusatz.

183. Das Parallelepipedum ist in sechs Rectangula eingeschlossen, deren zwey einander überstehende gleich sind. Und alle Durchschnitte, die mit der Grund-Fläche parallel geschehen, sind einander gleich.

Der 2. Zusatz.

184. Ein Würffel ist in sechs gleiche Qvadrate eingeschlossen.

Die 18. Erklärung.

185. Wenn sich ein recht winckelichter Triangel ABC um seine Seite AB herum beweget/ beschreibet er einen CONUM oder Kegel. VII. 116.

Zusatz

186. Alle Durchschnitte, die im Kegel mit der Grund-Fläche DBC parallel geschehen, sind Circul, aber immer kleinere, je näher sie der Spitze A kommen.

Die 19. Erklärung.

187. Wenn eine Linie AD sich in einem festen Puncte D verschieben lässet/ und um die gantze Peripherie einer geradelinichen Figur ABC mit dem anderen Ende A beweget; entstehet eine Pyramide. Ist die Figur ABC ein Circul/ so bekommet man einen Kegel. VII. 117.

Zusatz.

188. Eine Pyramide hat zur Grund-Fläche eine geradelinichte Figur, und ist um und um in so viel Triangel als die Grund-Fläche Seiten hat eingeschlossen, welche oben in einem Puncte D mit ihren Spitzen zusammen stossen.

Die 20. Erklärung.

189. Wenn ein Cörper in lauter gleiche reguläre Figuren von einerley Art eingeschlossen ist / nennet man ihn regulär oder ordentlich; die übrigen werden irreguläre oder unordentliche genennet.

Die 21. Erklärung.

VII. 118. 119. 120. 121.

190. Ausser dem Würffel (§. 182) sind noch vier andere reguläre Cörper, als das TETRAEDRUM/ **welches aus vier gleichseitigen Triangeln zusammen gesetzet wird: das** OCTAEDRUM/ **so aus achten zusammen gesetzet: das** ICOSAEDRUM/ **welches zwantzig einschliessen: und das** DODECAEDRUM/ **welches von zwölff regulären Fünff-Ecken eingeschlossen wird.**

Die 63. Aufgabe.

191. Den cörperlichen Inhalt eines Cubi oder Würffels und seine Fläche zu finden.

Auflösung.

Der Maaß-Stab des cörperlichen Inhalts ist eine Cubic-Ruthe, das ist, ein Würffel, der eine Ruthe dicke, und eine Ruthe breit ist. Diese wird eingetheilet in Cubic-Schuhe, in Cubic-Zolle 2c. Jenes sind Würffel, die zur Seite einen Schuh; diese

Diese aber Würffel, die zur Seite einen Zoll haben.
Wenn ihr nun den cörperlichen Inhalt eines Würffels wissen wollet, so

1. Messet die Seite des Würffels und multipliciret sie mit sich selbst, so habet ihr seine Grundfläche (§. 114. 184).
2. Diese multipliciret weiter durch seine Seite, so kommet der Inhalt des Würffels heraus.
3. Hingegen wenn ihr die Grundfläche mit 6 multipliciret; so bekommet ihr die Fläche des ganzen Würffels (§. 184).

Exempel.

Seite	34'	Grundfläche	1156'
	34	Seite	34
	136		4624
	102		3468
Grundfläche	1156'	Inhalt des Würffels	39304'
	6		
Fläche des Würffels	6936'		

Beweiß.

Man bilde sich ein, es sey die Seite des Würffels in etliche gleiche Theile eingetheilet. So ist klar, daß so viel Schichten kleiner Würffel heraus kommen, als die Höhe Theile hat, und in jeder Schichte so viel kleine Würffel als Quadrate in der Grundfläche sind. Derowegen wenn man die Höhe durch die Grundfläche multipliciret, so kommet die Zahl der kleinen Würffel heraus, die der grosse in sich hält. W. Z. E.

VII. 122.

Zusatz.

192. Wenn die Seite des Würffels 10 ist, so ist der cörperliche Inhalt 1000. Derowegen wenn die Seite 1 Ruthe oder 10 Schuhe hält, so sind 1000 schuhige Würffel in dem grossen enthalten. Und demnach hat die Cubic-Ruthe 1000 Cubic-Schuh, der Cubic-Schuh 1000 Cubic-Zolle, der Cubic-Zoll 1000 Cubic-Linien.

Der 17. Lehrsatz.

193. **Alle Parallelepipeda, Prismata und Cylinder / welche gleiche Grundflächen und Höhen haben, sind einander gleich.**

Beweiß.

Wenn man ein parallelepipedum, prisma und einen Cylinder in lauter Scheiben zerschneidet, so subtil, als man will; so sind nicht allein alle Scheiben einander gleich (§. 181. 183); sondern wenn zwey Cörper auch gleiche Höhen haben, so können aus einem nicht mehr als aus dem anderen geschnitten werden. Und also fasset ein Cörper so viel Raum in sich als der andere. W. Z. E.

Die 64. Aufgabe.

VII. 123 194. **Den Inhalt eines Parallelepipedi und seine Fläche zu finden.**

Auflösung.

1. Multipliciret die Länge AB durch die Breite BC, so habet ihr die Grundfläche ABCD (§. 117. 183).
2. Diese multipliciret ferner durch die Höhe BF, so kommet der verlangte Inhalt heraus.

Z. E.

Z. E. Es sey AB 36' BC 15' BF 12'

Länge AB	36	Grundfl. ABCD	540
Breite BC	15	Höhe BF	12
	180		1080
	36		54
Grundfl. ABCD	540'	Cörperlicher Inhalt.	6480'

Vor die Fläche.

1. Multipliciret AB in BC, ingleichen AB in BF und BF in BC, so habet ihr die Vier-Ecke BD, EB und BG (§. 117. 183).
2. Addiret die drey Vier-Ecke zusammen und multipliciret die Summe durch 2; so bekommet ihr die Fläche des Parallelepipedi heraus (§. 117. 183).

Z. E.

AB 36'	AB 36'	BC 15'
BC 15	BF 12	BF 12
180	72	30
36	36	15
□ DB 540'	□ BG 432'	□ BE 180'.

□ DB 540
□ BG 432
□ BE 180

1152'
2

2304' Fläche des Parallelepipedi.

Beweiß.

Der Beweiß ist eben wie in der vorhergehenden Aufgabe (§. 191).

Der 28. Lehrsatz.

195. **Ein jedes** Parallelepipedum **wird durch** VII. 123.

die Diagonal-Fläche DBFH in zwey gleiche Prismata getheilet.

Beweiß.

Die Diagonal-Linie DB theilet das parallelogrammum ABCD in zwey gleiche Triangel (§. 102). Da nun die beyden Prismata ADBFGH und DBCEFH ausser diesen gleichen Grundflächen auch einerley Höhe DH haben; müssen sie einander gleich seyn (§. 193). W. Z. E.

Die 65. Aufgabe.

196. **Den Inhalt eines jeden Prismatis und seine Fläche zu finden.**

Auflösung.

VII. 124. 1. Suchet die Grundfläche des Prismatis (§. 117. 121. 122. 123. 124).

2. Multipliciret selbige durch die Höhe, so kommet der verlangte Inhalt heraus.
3. Hingegen multipliciret den Umfang der gantzen Grundfläche durch dieselbe Höhe; so kommet die Fläche ausser den beyden Grundflächen heraus.
4. Wenn ihr nun diese dazu addiret, so habet ihr die gantze Fläche (§. 180).

Z. E. Es sey AB 8′ CD 6′ AE 15′

AB	8′	ABC	24′
½ CD	3	AE	15
ABC	24′		120
			24
		Inhalt des Prismatis	360′

BC	91″
BA	80
AC	62

Peri-

Peripherie	233″
AF.	150
	11650
	233
Seiten-Fläche	34950″
BAC	2400
HEI	2400
Gantze Fläche	39750″

Beweiß.

Das dreyeckichte Prisma ist die Helffte eines Parallelepipedi, welches mit ihm einerley Höhe, aber eine doppelte Grundfläche hat (§. 195). Wenn man die gantze Grundfläche des Parallelepipedi mit der Höhe multipliciret, so bekommet man seinen Inhalt (§. 194). Derowegen wenn man die Helffte von der Grundfläche des Parallelepipedi, das ist, die Grundfläche des dreyeckichten Prismatis durch die Höhe multipliciret, so muß die Helffte des Parallelepipedi, das ist, der Inhalt des Prismatis heraus kommen. Alle übrigen Prismata lassen sich in dreyeckichte zertheilen, und also gilt auch von ihnen, was von den dreyeckichten erwiesen worden.

Die 66. Aufgabe.

197. **Aus der gegebenen Höhe eines Cylinders und dem Diametro desselben seinen Inhalt und seine Fläche zu finden.**

Auflösung.

1. Suchet die Grundfläche des Cylinders (§. 134).
2. Multipliciret selbige durch seine Höhe, so habet ihr den verlangten Inhalt.

3. Hingegen die Peripherie multipliciret durch eben dieselbe Höhe, so kommet die Fläche ohne die beyden Grundflächen heraus.

4. Wenn ihr nun die beyden Grundflächen dazu addiret; so ist die Summe die verlangte Fläche des Cylinders.

VI. 113. Z. E. Es sey der Diameter 2 AB 560''/ die Höhe BC 892''/ so ist

die Grundfl.	246176''	Periph.	17584'''
die Höhe BC	892	BC	8920
	492352		351680
	2215584		158256
	1969408		140672
Inhalt des Cylinders.	219588992''		156849280'''
			24617600
			24617600
		Fläche	206084480'''

Beweiß.

Weil der Circul ein reguläres Viel-Ecke ist, so unzehlig viel Seiten hat, so kan man den Cylinder als ein Prisma ansehen, welches unzehlig viel Seiten hat. Und dannenhero wird sein Inhalt gefunden, wenn seine Grundfläche durch die Höhe; die Fläche aber, wenn die Peripherie der Grundfläche in eben diese Höhe multipliciret wird (§. 196). W. Z. E.

Der 29. Lehrsatz.

108. **Pyramiden und Kegel/ die gleiche Grundflächen und Höhen haben/ sind einander gleich.**

Beweiß.

Beweiß.

Man findet ihn in den Anfangs-Gründen §. 223.

Der 30. Lehrsatz.

199. **Eine jede Pyramide ist der dritte Theil von einem Prismate, so mit ihr gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat.**

Beweiß.

Man findet ihn in den Anfangs-Gründen §. 224.

Zusatz.

200. Da nun ein Kegel vor eine Pyramide zu halten ist, welche unzehlich viel Ecken hat; so wird auch derselbe der dritte Theil eines Cylinders seyn, so gleiche Grundfläche und gleiche Höhe mit ihr hat.

Die 67. Aufgabe.

201. **Den Inhalt einer Pyramide/ ingleichen eines Kegels zu finden.**

Auflösung.

1. Suchet den Inhalt eines Prismatis und Cylinders, so gleiche Grundflächen und Höhen mit der Pyramide und dem Kegel haben (§. 196. 197).
2. Diesen dividiret durch 3, so kommet der Inhalt der Pyramide und des Kegels heraus (§. 199. 200).

Oder:

Multipliciret die Grundfläche beyderseits mit dem dritten Theile der Höhe.

Z. E. Der Inhalt des Prismatis ist (§. 196) 360'. Also ist der Inhalt der Pyramide 120'. Der Inhalt des Cylinders ist (§. 197) 219° 588' 992''. Also kommen für den Kegel 73196330$\frac{2}{3}$''.

Die

Die 68. Aufgabe.

VII. 125. 202. **Den Inhalt eines abgekürtzeten Kegels ABDC zu finden.**

Auflösung.

1. Wenn man inferiret: wie der Unterscheid AH der halben Diametrorum AG und CF zu der Höhe des abgekürtzeten Kegels CH; so der halbe grosse Diameter AG zu der Höhe des gantzen Kegels EG (§. 149); so kan man durch die Regel Detri die Höhe des gantzen Kegels EG finden (§. 85 Arithm.).
2. Aus dieser und dem Diametro AB suchet den Inhalt des gantzen Kegels AEB (§. 201).
3. Ziehet die Höhe des abgekürtzeten Kegels FG von der Höhe des gantzen EG ab, so bleibet die Höhe des abgeschnittenen Kegels EF übrig.
4. Suchet aus dieser und dem Diametro CD den Inhalt des Kegels ECD (§. 201).
5. Endlich ziehet den kleinen Kegel ECD ab, so bleibet der Inhalt des abgekürtzeten ACDB übrig.

Z. E. Es sey AB 36'/CD 20'/FG=CH 12'; so ist AG 18'/CF 10' und AH 8'; demnach

$$AH : CH = AG : GE$$

$$8 : 12 = 18 :$$

4) 2 3 9 (§. 96 Arithm.)

2) 1 3

27' = GE

12 = GF

15 = FE

100 : 314 = 18
18

2512
314

56′5″2‴ halbe grosse Peripherie
1800 AG

45216
5652

101736″ grosse Grundfläche
90 $\frac{1}{3}$ GE

9°156′240″ der Kegel AEB
100 : 314 = 10 :
10

314″ halbe kleine Peripherie
100 CF

31400″ kleine Grundfläche
50 $\frac{1}{3}$ EF

1570000″ Inhalt des Kegels CED
9.1.56240 Inhalt des Kegels AEB

7586240″ Inhalt des abgekürtzten Kegels ACDB

Der 31. Lehrsatz.

203. **Die Kugel ist $\frac{2}{3}$ von einem Cylinder / der gleiche Grundfläche und Höhe mit ihr hat.**

Beweiß.

Man findet ihn in den Anfangs-Gründen §. 231.

Der

Der 32. Lehrsatz.

204. **Der Cubus Diametri verhält sich zu der Kugel bey nahe wie 300 zu 157.**

Beweiß.

Wenn der Diameter der Kugel 100 ist, so hält der Cubus desselben 1 000 000 (§. 191) und der Cylinder, der mit der Kugel eine Grundfläche und Höhe hat, 785000 (§. 197). Und demnach ist der Inhalt der Kugel $523333\frac{1}{3}$ (§. 202). Solchergestalt verhalt sich der Cubus zur Kugel, wie 1000 000 zu $523333\frac{1}{3}$, das ist, wenn man beyderseits mit 3 multipliciret, wie 3000 000 zu 1570000 (§. 58 Arithm.) oder wenn man ferner durch 10000 dividiret, wie 300 zu 157 (§. 59 Arithm.). W. Z. E.

Anmerckung.

205. Ich sage/ der Cubus Diametri verhalte sich zur Kugel bey nahe wie 300 zu 157/ weil man voraus setzet/ der Diameter im Circul verhalte sich zu seiner Peripherie wie 100 zu 314: welches nur bey nahe zutrifft (§. 129).

Der 33. Lehrsatz.

206. **Die Kugel-Fläche verhält sich zu dem grösten Circul der Kugel wie 4 zu 1.**

Beweiß.

Man findet ihn in den Anfangs-Gründen §. 235.

Zusatz.

207. Also kommet die Kugel-Fläche heraus, wenn man die Peripherie durch den Diametrum multipliciret (§. 134).

Die 69. Aufgabe.

208. **Aus dem gegebenen Diametro einer Kugel**

Kugel, so wohl den Inhalt ihrer Fläche, als ihren cörperlichen Inhalt zu finden.

Auflösung

1. Suchet die Peripherie des grösten Circuls (§. 132).
2. Multipliciret sie durch den gegebenen Diametrum, so habet ihr die Kugel-Fläche (§. 207).
3. So ihr nun ferner dieselbe durch den sechsten Theil des Diametri multipliciret oder durch den gantzen Diametrum, und das Product durch 6. dividiret; kommet der cörperliche Inhalt der Kugel heraus.

Z. E. Es sey der Diameter 5600''', so ist die Peripherie des grösten Circuls 17584'''

	17584'''
Diameter	5600
	10550400
	87920
Kugel-Fläche	984704''
Diameter	560
	59082240
	4923520
	551434240''

$\frac{551434240}{66666666}$ (4, 45) 91905706 $\frac{2}{3}$'' Inhalt der Kugel.

Die 70. Aufgabe.

209. Aus dem gegebenen Diametro einer Kugel ihren cörperlichen Inhalt noch auf eine andere Art zu finden.

Auf-

Auflösung.

1. Suchet den Cubum des Diametri (§. 191), oder in den Tabellen über die Cubic-Zahlen.
2. Suchet zu 300, 157 und dem gefundenen Cubo die vierdte Proportional-Zahl (§. 85. Arithm.) diese ist der cörperliche Inhalt der Kugel (§. 204).

Z. E. Es sey der Diameter einer Kugel 64'' so ist dessen Cubus 262144, folgends

$$300 - 157 - 262144''$$

```
    262144''
       157
  --------
   1835008
  1310720
  262144
  --------
  41156608
```

```
12 221
41156608 }  137188''208/300  Inhalt der Kugel.
3333300  }
```

Der 34. Lehrsatz.

210. **Alle Prismata, ingleichen Parallelepipeda, Cylinder / Pyramiden und Kegel / wenn sie gleiche Höhen haben / verhalten sich wie ihre Grundflächen: Haben sie aber gleiche Grundflächen / so verhalten sie sich wie ihre Höhen.**

Beweiß.

Prismata, Parallelepipeda und Cylinder verhalten sich wie die Producte aus ihren Höhen in ihre Grundflächen (§. 194. 196. 197), Pyramiden aber und Kegel wie die Producte aus dem dritten Theile ihrer Höhen in ihre Grundflächen (§. 201)

201): und also alle insgesammt, wenn ihre Höhen gleich sind, wie die Grundflächen; wenn aber die Grundflächen gleich sind, wie die Höhen (§. 58. Arithm.). W. Z. E.

Zusatz.

211. Weil die Cylinder Circul zu ihren Grundflächen haben (§. 179), die Circul aber sich wie die Qvadrate ihrer Diametrorum verhalten (§. 131); so müssen auch die Cylinder von gleicher Höhe sich wie die Qvadrate ihrer Diametrorum, oder der Diametrorum ihrer Grundflächen verhalten.

Der 35. Lehrsatz.

212. **Die Kugeln verhalten sich gegen einander wie die Cubi ihrer Diametrorum.**

Beweiß.

Wie die eine Kugel zu dem Cubo ihres Diametri, so verhält sich auch die andere zu dem Cubo ihres Diametri (§. 204). Derowegen verhält sich auch die eine Kugel zu der andern wie der Cubus des Diametri der einen zu dem Cubo des Diametri der andern (§. 83 Arithm.). W. Z. E.

Die 71. Aufgabe.

213. **Einen Visir-Stab zu verfertigen/ durch den man leichte finden kan wie viel Kannen von einer flüßigen Materie als Bier/Wein/Brandtewein u. s. w. in einem Cylindrischen Gefässe enthalten sind/ oder Raum haben.**

Auflösung.

1. Nehmet den Diameter von einem Cylindrischen

Gefässe, dergleichen man zu einem Kannen-Maasse brauchet, und traget ihn aus A in B.

2. Richtet in A eine lange Perpendicular-Linie auf, und traget aus A in 1 den Diameter des Kannen-Gefässes; so ist die Linie B 1 der Diameter von einem zweykannigen Gefässe, welches mit dem einkannigen einerley Höhe hat.

3. Traget B 1 aus A in 2, so ist B 2 der Diameter eines dreykannigen Gefässes, welches mit dem einkannigen einerley Höhe hat.

4. Wenn ihr nun auf gleiche Art die Puncte 3. 4. 5. 6. u. s. w. gefunden, so traget dieselben auf die eine Seite des Visir-Stabes, auf die andere aber die Höhe der Kanne so vielmahl, als angehet. So ist geschehen, was man verlanget.

Beweiß.

Denn wenn zwey Cylindrische Gefässe einerley Höhe und zwar die Höhe einer Kanne haben, verhalten sie sich wie die Qvadrate ihrer Diametrorum (§.211). Daher ist das Qvadrat des Diametri eines zweykannigen Gefässes zwey; eines dreykannigen drey; eines vierkannigen viermahl so groß als eines einkannigen, u. s. w. Nun ist das Qvadrat B 1 oder A 2 zweymahl, das Qvadrat B 2 oder A 3 dreymahl, das Qvadrat B 3 oder A 4 viermahl so groß als das Qvadrat AB oder A 1 (§. 144), u. s. w. Da nun AB oder A 1 der Diameter eines einkannigen Gefässes ist, so ist A 2 der Diameter eines zweykannigen, A 3 der Diameter eines dreykannigen, A 4 der Diameter eines vierkannigen u. s. w. Derowegen wenn ihr mit der Seite des Maaß-Stabes, da diese Eintheilungen aufgezeichnet

zeichnet sind, den Diameter eines Cylindrischen Gefässes ausmesset; so wisset ihr, wie viel Kannen auf dem Boden stehen können. Messet ihr nun ferner mit der andern Seite des Visir-Stabes die Länge desselben, so wisset ihr, wie viel Kannen über einander stehen können. Derowegen wenn ihr den Diameter durch die Höhe multipliciret, so kommet die Anzahl der Kannen heraus, die das gantze Gefässe fassen kan. Und solchergestalt könnet ihr durch den verfertigten Visir-Stab den Inhalt eines Cylindrischen Gefässes nach Kannen-Masse finden. W. Z. E.

Anmerckung.

214. Es sey z. E. Der Diameter eines Cylindrischen Gefässes 8, die Höhe 12; so haben 96 Kannen in demselben Raum.

Die 72. Aufgabe.

215. **Ein gegebenes Faß zu visiren, das ist, zu finden, wie viel Kannen in demselben Raum haben.** VII. 127.

Auflösung.

1. Messet mit der gehörigen Seite des Visir-Stabes den Diameter des Bodens AB, ingleichen den Diameter des Bauches durch das Spund-Loch CD: dabey mit der anderen Seite des Visir-Stabes die Länge des Fasses FE.
2. Weil das Faß mitten bey dem Spund-Loche einen Bauch hat, gegen den Boden aber beyderseits niedergedruckt ist, so nimmet man an (weil es vermöge der Erfahrung zutrifft, ob es sich gleich nicht geometrisch erweisen lasset) daß das

Faß einem Cylinder gleich sey, dessen Grundfläche der mittlere Arithmetische Proportional-Circul zwischen dem kleinen Circul des Bodens und dem grossen des Bauches ist. Addiret demnach den grossen Diameter CD und den kleinen AB.

3. Die halbe Summe multipliciret durch die Länge des Fasses FE; so kommet **vermöge des Beweises der vorhergehenden Aufgabe** (§. 213) die Zahl der Kannen heraus, welche in dem Fasse Raum haben;

Z. E. Es sey AB = 8
CD = 12

so ist die Summe = 20

die halbe Summe = 10
FE = 15

Inhalt des Fasses = 150 Kannen.

Anmerckung.

216. Es ist zu mercken, daß man noch keine leichte und richtige Manier ersonnen Fässer, die nicht voll sind, zu visiren, wenn sie nach der Länge liegen. Will man sie aber auf den Boden setzen und hernach die Höhe des Weines an stat der Länge des Fasses annehmen: so kan man nach gegenwärtiger Aufgabe finden, wie viel Kañen darinnen enthalten sind.

Die 73. Aufgabe.

VII. 128. 217. **Eines jeden irregulären Cörpers Inhalt zu finden.**

Auflösung.

1. Leget den Cörper in ein ausgeholetes Parallelepipedum und übergiesset ihn mit Wasser, oder überschüttet ihn mit Sande. Mercket dabey

die

die Höhe des Wassers, oder des wohlgeebneten Sandes AB.

2. Nehmet den Cörper heraus und mercket abermahl die Höhe des Wassers oder des Sandes, nachdem er wieder geebnet worden, AC: so wisset ihr BC.

3. Weil nun der Inhalt des Cörpers dem Parallelepipedo DFCGE gleich ist, so messet desselben Länge FC und Breite CG, und suchet den Inhalt desselben (§. 194).

Z. E. Es sey AB 8' AC 5' so ist BC 3'. Es sey ferner FC 12', CG 4': so wird endlich der Inhalt des Cörpers 144' gefunden.

Anmerckung.

218. Wenn man den Cörper in dergleichen Gefässe nicht wohl legen kan, als wenn man zum Exempel eine feststehende Statue ausmessen solte; so darff man nur entweder ein Parallelepipedum oder ein viereckigtes Prisma um denselben aufrichten, den leeren Raum mit Sand ausfüllen und im übrigen wie vorhin verfahren.

Die 74. Aufgabe.

219. **Netze zu zeichnen, daraus man die geometrischen Cörper zusammen legen kan.**

Auflösung.

1. Beschreibet einen gleichseitigen Triangel ABC (§. 53): theilet die Seiten in zwey gleiche Theile in D, E und F, und ziehet die Linien DE, EF und FD: so ist das Netze des Tetraëdri fertig (§. 190). VIII 129.

2. Wenn man die Seite AC in G, BC in H und ED in L verlängert, biß CG = DC, CH = FC, DI = IL = ED; so lassen sich die Linien GL, CI VIII 130.

 und

und IH ziehen, und ist das Netze des Octaedri fertig (§. 190).

VIII 3. Traget auf die Linie AB die Seite eines Würffels AI viermahl, so daß AI = IL = LN = NB, und construiret das rectangulum ACDB dergestalt, daß AC = AI (§. 99). Ziehet die Linien IK, LM, NO mit AC parallel (§. 67) und verlängert IK und LM beyderseits in E und F, G und H, biß EI = IK = KF und GL = LM = MH; so giebet sich das Netze des Hexaedri oder des Würffels (§. 182).
131.

VIII 4. Beschreibet ein reguläres Fünffecke ABCDE (§. 107), leget das Lineal an D und B und ziehet die Linie BL; leget es gleichfalls an D und A und ziehet die Linie AG; machet AG = AB = BL und mit der Weite AB aus G und L einen Durchschnitt in Q; so giebet sich das Fünffecke ABLQG. Auf gleiche Art hänget die übrigen Fünff-Ecke BNROC, CHGFD, DKSME ETVIA, ingleichen die übrigen sechs a, b, c, d, e, f daran: so ist das Netze des Dodecaedri fertig (§. 190).
132.

VIII 5. Beschreibet einen gleichseitigen Triangel ACB (§. 53); verlängert die Linie AB in D und traget sie noch viermahl darauf; ziehet CE mit AD parallel (§. 67) und machet CI = KI = KL = LM = ME = AB; verlängert AC in N biß CN = AC; leget das Lineal an B und I, F und K, G und L, H und M, D und E und ziehet die Linien YO, SP, TQ, VR und XE; leget dasselbe ferner auf D und M, H und L, G und K, F und I, B und C, und ziehet die Linien DQ, XP, VO, TN, SC; endlich machet MR = ME und BY = BA und ziehet die
133.

Linien

Linien RE und AY. Die beschriebene Figur ist das Netze des Icosaedri (§. 190).

6. Auf die Linie BD traget aus B in H die Breite, aus H in I die Länge, aus I in K die Breite und aus K in D die Länge eines Parallelepipedi; in B richtet seine Höhe BA perpendicular auf und beschreibet das rectangulum BACD (§. 99). Ziehet EH, FI, GK mit AB parallel (§. 67), und verlängert EH beyderseits in L und N, ingleichen FI in M und O, biß LE, MF, IO und NH der Breite des Parallelepipedi BH gleich werden: so giebet sich das Netze des Parallelepipedi (§. 182). VIII 134.

7. Traget auf CF die Seiten der Grundfläche eines Prismatis CG, GH und HF; beschreibet das rectangulum CAEF, dessen Höhe CA der Höhe des Prismatis gleich ist (§. 99). Auf BD und GH construiret mit AB und DE, CG und HF die △△ BKD und GIH (§. 55): so ist das Netze des Prismatis fertig (§. 179). Wenn die Grundfläche ein Fünf-Sechs-Sieben-Ecke ꝛc. ist; so wird auf BD und GH ein Fünf-Sechs-Sieben-Ecke ꝛc. beschrieben. VIII 135.

8. Beschreibet aus A mit der Seite einer Pyramide AE einen Bogen EB; traget darein die Linien des Umfanges von der Grundfläche ED, DC, CB und ziehet die Linien AE, AD, AC, AB. Endlich beschreibet auf DC die Grundfläche der Pyramide: so ist das Netze fertig (§. 187). VIII 136.

9. Für das Netze des Cylinders beschreibet ein Rectangulum (§. 99), dessen Höhe BC der Höhe des Cylinders, die Länge CF dem Umfange gleich ist (§. 132): verlängert BC in A und D biß BA und VIII 137.

CD dem Diameter gleich werden, und beschreibet die Circul der Grundflächen des Cylinders. So ist geschehen, was man verlangte (§. 179).

Anmerckung.

220. Damit man die Cörper aus den Netzen zusammen leimen kan; so lässet man einige Ränder, indem man sie ausschneidet, wie durch die punctirten Linien Fig. 129. angedeutet worden. Diese Arbeit dienet den Anfängern die geometrischen Cörper deutlich zu begreiffen.

ENDE der Geometrie.



An-

Anfangs-Gründe der Trigonometrie.

Die 1. Erklärung.

Die Trigonometrie ist eine Wissenschafft aus drey gegebenen Theilen eines Triangels die übrigen drey zu finden/ z. E. aus zwey Seiten AB und AC und einem Winckel C die übrigen beyden Winckel A und B nebst der Seite BC. I. 1.

Die 2. Erklärung.

2. Die halbe Sehne AD eines Bogens AB heisset der *SINUS* des Bogens AE/ ingleichen des Bogens AI/ welche die Helfften der Bogen AEB und AIB sind. I. 2.

Der 1. Zusatz

3. Derowegen stehet der Sinus eines Bogens AD auf dem Radio des Circuls EC perpendicular (§. 95 Geom.) und also sind die Sinus verschiedener Bogen mit einander parallel (§. 75 Geom.).

Der 2. Zusatz.

4. Weil der Bogen AE das Maaß des Winckels ACE und der Bogen AI das Maaß des Winckels ACI ist (§. 16 Geom.), so ist auch AD der Sinus derselben Winckel.

Der 3. Zusatz.

5. Und also haben zwey Winckel, die neben einander auf einer Linie EI stehen, einerley Sinum.

Die 3. Erklärung.

6. Die Linie EF/ welche auf dem Ende des Radii EC perpendicular aufgerichtet wird/heisset des Bogens AE und folgends des Winckels ECA *TANGENS*; FC aber desselben Bogens und Winckels *SECANS.*

Die 4. Erklärung.

I. 2. 7. Hingegen ED wird sein *SINUS VERSUS* und AG (= DC) der Sinus des Bogens AH/ welcher mit EA 90 Grad machet/der *SINUS COMPLEMENTI* oder auch *COSINUS* genennet: der Tangens davon HL *TANGENS COMPLEMENTI* oder auch *COTANGENS;* ingleichen der Secans CL *SECANS COMPLEMENTI* oder *COSECANS.*

Die 5. Erklärung.

I. 2. 8. Endlich der *RADIUS* EC heisset der *SINUS TOTUS.*

Zusatz.

9. Weil der Radius EC der Sinus des Qvadranten EH ist; so ist der Sinus totus der Sinus eines rechten Winckels (§. 37 Geom.).

Der 1. Lehrsatz.

I. 3. 10. Die Sinus ähnlicher Bogen BC und EF haben gegen ihre Radios AB und ED einerley Verhältnis.

Beweiß.

Wenn die Bogen BG und EH einander ähnlich sind, so hat jeder gleich viel Grade, und also sind die Winckel A und D einander gleich (§. 35 Geom.).

Geom.). Nun sind bey C und F rechte Winckel (§. 3). Derowegen ist wie der Radius AB zum Sinu BC, so der Radius ED zum Sinu EF (§. 148 Geom.). W. Z. E.

Die 1. Anmerckung.

11. Daher hat man dem Sinui toti in einem jeden Circul insgemein 10 000 000 Theile zugeeignet/ und durch Hülffe der Geometrie ausgerechnet/ wie viel derselben der Sinus und Tangens von jedem Grade/ ja einer jeden Minute/ durch den gantzen Qvadranten bekommet. Und solchergestalt sind die Tabulæ Sinuum und Tangentium entstanden/ welche man in der Trigonometrie nöthig hat: wie in den Anfangs-Gründen umständlicher gezeiget wird.

Die 2. Anmerckung.

12. Weil die Sinus und Tangentes grosse Zahlen sind/ welche das Multipliciren und Dividiren in der Trigonometrie sehr beschwehrlich machen; so hat Johannes Neper ein Schottländischer Baron/ und nach ihm Heinrich Brigge ein Engelländer/ gewisse Zahlen ersonnen/ welche man an statt der ordentlichen Zahlen mit grossem Vortheile in der Rechnung brauchen kan/ indem sie das Multipliciren in das Addiren/ und das Dividiren in das Subtrahiren verwandeln. Sie werden Logarithmi genennet/ und sind nicht allein für alle Sinus und Tangentes; sondern auch für die gemeinen Zahlen von 1 biß 10000/ zuweilen auch weiter/ in den gewöhnlichen Tabulis Sinuum und Tangentium zu finden. Von denselben müssen wir noch handeln/ ehe wir zu den Aufgaben der Trigonometrie schreiten.

Die 6. Erklärung.

13. Wenn eine Reihe Zahlen in Geometrischer Proportion und eine andere in Arithmetischer fortgehen; so heissen die in der letzteren die *LOGARITHMI* der ersteren.

Die

Die 1. Anmerckung.

14. Es seyn die beyde Reihen Zahlen

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512.
0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

unter welchen die ersten in einer Geometrischen/ die andern in einer Arithmetischen Proportion fortgehen; so ist 0 der Logarithmus von 1/ 1 der Logarithmus von 2/ 2 der Logarithmus von 4/ 7 der Logarithmus von 128 u. s. w.

Die 2. Anmerckung.

15. Wenn der Logarithmus von Eines 0 ist/ so ist der Logarithmus des Products gleich der Summe der Logarithmorum der in einander multiplicirten Zahlen. Z. E. 3 die Summe der Logarithmorum 1 und 2 ist der Logarithmus von 8 dem Producte der beyden Zahlen 2 und 4. Wiederum 7 die Summe der Logarithmorum 2 und 5/ ingleichen 4 und 3/ ist der Logarithmus von 128 dem Producte aus den beyden Zahlen 4 und 32/ ingleichen 8 und 16. Daher ist der Logarithmus des Qvadrates dem Logarithmo der Wurtzel zweymahl genommen gleich. Z. E. 4 der Logarithmus von der Qvadrat-Zahl 16 ist zweymahl so groß wie 2 der Logarithmus von der Wurtzel 4; und 6 der Logarithmus von der Qvadrat-Zahl 64 ist zweymahl so groß wie 3 der Logarithmus von der Wurtzel 8. Hingegen die Helffte eines Logarithmi ist der Logarithmus der Wurtzel aus der ihm zugehörigen Zahl. Also ist die Helffte des Logarithmi 8 der Logarithmus der Wurtzel 16 aus der Qvadrat-Zahl 256. Gleichergestalt ist der Logarithmus einer Cubic-Zahl dreymahl so groß wie der Logarithmus der Wurtzel. Als 9 der Logarithmus von der Cubic-Zahl 512 ist dreymahl so groß als 3 der Logarithmus von der ihr zugehörigen Wurtzel 8. Und daher der Logarithmus der Cubic-Wurtzel der dritte Theil des Logarithmi der Cubic-Zahl. Z. E. 2 der Logarithmus von 4 ist der dritte Theil des Logarithmi 6 von der Cubic-Zahl 64.

Die 3. Anmerckung.

16. Wenn der Logarithmus von Eines 0 ist; so ist der

der Logarithmus des Qvotienten der Unterscheid zwischen den Logarithmis der beyden Zahlen / die man durch einander dividiret. Und findet man den Logarithmum von einem Bruche / wenn man den Logarithmum des Zehlers von dem Logarithmo des Nenners abziehet / und vor das überbliebene das Zeichen der Subtraction — setzet. Also ist 2 der Unterscheid zwischen 5 und 7 der Logarithmus des Qvotienten 4 / welcher heraus kommet / wenn man die dazu gehörigen Zahlen 128 und 32 durcheinander dividiret. Ingleichen 5 die Differentz zwischen 3 und 8 ist der Logarithmus von 32 dem Qvotienten / der heraus kommet / wenn man 256 durch 8 dividiret. Hingegen — 1 / der Unterscheid zwischen 0 und 1 ist der Logarithmus von $\frac{1}{2}$

Die 4. Anmerckung.

17. Hieraus erhellet / wie die Logarithmi das Multipliciren in Addiren / das Dividiren in Subtrahiren / die Ausziehung der Qvadrat-Wurtzel in Halbiren / und die Ausziehung der Cubic-Wurtzel in das Dividiren durch 3 verwandeln.

Die 5. Anmerckung.

18. Man hat die Logarithmos von 1. 10. 100. 1000. 10 000 angenommen 0. 00 000 000 / 1. 00 000 000 / 2 00 000 000 / 3. 00 000 000 / 4. 00 000 000 und auf eine sehr mühsame Art die Logarithmos aller Zahlen von 1 bis 10000 / ja nach diesem gar bis 100 000 gefunden / wie in den Anfangs-Gründen gelehret wird. Daraus hat man ferner die Logarithmos Sinuum und Tangentium gerechnet / wie ebenfalls daselbst zu finden. Wie die Logarithmi gebrauchet werden / erhellet aus folgenden Aufgaben.

Der 2. Lehrsatz.

19. **In einem jeden Triangel ABC verhalten sich die Seiten wie die Sinus der ihnen entgegen stehenden Winckel.** I. 4.

Beweiß.

Man gedencke sich / es sey der Triangel ABC in einen

einen Circul geschrieben, welches jederzeit geschehen kan (§. 97 Geom.). So ist der halbe Bogen AB das Maaß des Winckels C (§. 84 Geom.) und also ist die halbe Seite AB desselben Sinus (§. 2). Eben so ist der halbe Bogen AC das Maaß des Winckels B und daher die halbe Seite AC der Sinus des Winckels B. Derowegen verhält sich, wie die Seite AB zu dem Sinu des ihr entgegen gesetzten Winckels C, also die Seite AC zu dem Sinu des ihr entgegen stehenden Winckels B (§. 59 Arithm.). W. Z. E.

Die 1. Aufgabe.

I. 4. **20. Aus der gegebenen Seite AB und zweyen Winckeln A und C/ die Seite BC zu finden.**

Auflösung.

Sprechet (§. 19).

Wie der Sinus des Winckels C
zu der ihm entgegen gesetzten Seite AB,
So der Sinus des Winckels A
zu der ihm entgegen stehenden Seite BC.

Z. E. Es sey, C = 48° 35′/ A = 57° 29′/ AB = 74′; so verfahret ihr mit den Logarithmis folgender gestalt:

Log. Sin. C	9.8750142
Log. AB	1.8692317
Log. Sin. A	9.9259487
Summe	11.7951804

Log. BC 1.9201662/ zu welchem in den Taffeln der Logarithmus von 83 am nächsten kommet.

Die

Die 1. Anmerckung.

21. Wollet ihr mit 83 Schuhen nicht zu frieden seyn/ sondern noch Zolle dazu haben/ so suchet diesen Logarithmum unter der Characteristica 2 hinter 830 auf. Alsdenn werdet ihr finden/ daß der Logarithmus von 832 ihm am allernächsten kommet/ und also über 3 Schuhe noch 2 Zoll sind. Ja wollet ihr gar Linien haben/ so suchet euren Logarithmum noch einmahl unter der Characteristica 3 hinter 8320 auf/ so findet ihr/ daß der Logarithmus von 8321 ihm am nächsten kommet/ und also die Seite BC 8° 3′ 2′′ 1′′′ sey. Und solchergestalt müsset ihr allezeit verfahren/ wenn der Logarithmus einer Seite unter seiner Characteristica nicht vollkommen zu finden.

Die 2. Anmerckung.

22. Weil die Auflösung der Aufgabe durch die Regel Detri geschiehet (§. 85 Arithm.) und daher der Sinus A mit der Seite AB multipliciret/ das Product aber durch den Sinum des Winckels C dividiret werden solte; so ist klar/ daß man den Logarithmum von AB zu dem Logarithmo des Sinus A addiren/ und von der Summe den Logarithmum des Sinus C abziehen muß (§. 15. 16).

Die 2. Aufgabe.

23. **Aus zweyen gegebenen Seiten AB und BC und einem Winckel C/ der einer von ihnen entgegen stehet/ die übrigen Winckel zu finden.** I. 4.

Auflösung.

Sprechet (§. 19);

Wie die Seite AB
zu dem Sinu des entgegen stehenden Winckels C;
So die Seite BC
zu dem Sinu des entgegen stehenden Winckels A.

Z. E. Es sey AB = 82′/ BC = 75/ C 64° 33′. Verfahret also:

Log. AB	1.9138138	
Log. Sin C	9.9556688	
Log. BC	1.8750613	
Summe	1.1.83.0.73 01.	

Log. Sin. A. 9916916 3/ zu welchem in den Taffeln der Logarithmus von 55° 40′ am nächsten kommet.

Die 1. Anmerckung.

24. Seyd ihr mit 55° 40′ nicht zufrieden / so könnet ihr noch Secunden dazu suchen. Ziehet nemlich von eurem

Logarithmo	9.9169.1.63	
den nächst-kleineren	9.9168593	ab und
mercket die erste Differentz	570	
Ingleichen von dem nächst-grösseren	9.9169.4.55	
den nächst-kleineren	9.9168593	und mer-
cket die andere Differentz	862	

Sprechet: 862 geben 60″ wie viel geben 570

```
      3.4.2.00 (39″          570
862) 2586                     60
     ------                -----
      8.3.4.0              34200
      7758
     ------
       582
```

So bekommet ihr noch 39″/ und also ist der Winckel A 55° 40′ 39″

Die 2. Anmerckung

25. Wenn ihr zwey Winckel A und C habet/ könnet ihr den

den dritten durch die Geometrie finden (§. 77 Geom.): wie aus beygefügtem Exempel zu ersehen.

C	64°	33′	0″
A	55	40	39
A+C	120	13	39
A+C+B	179	59	60
B	59	46	21

Die 3. Aufgabe.

26. Aus zweyen Seiten AB und BC/ die in einem rechtwinckelichten Triangel den rechten Winckel B einschliessen/ die Winckel zu finden. I. 5.

Auflösung.

Nehmet BC für den Sinum totum an, so ist AB der Tangens des Winckels C (§. 6). Sprechet demnach:

Wie die Seite BC
zu der Seite AB;
So verhält sich der Sinus totus
zu dem Tangente des Winckels C.

Z. E. Es sey BC 79′; AB 54′; so geschiehet die Rechnung also:

Log. BC	1.8976271	
Log. AB	1.7.3.2.39.38	}
Log. Sin. tot.	1.000000000	}

Log. Tang. C 9.8347667, welchem in den Taffeln am nächsten kommet der Logarithmus Tangentis von 34°21′. Demnach ist der Winckel C 34°21′; der Winckel A aber 55°39′ (§. 75 Geom.).

Lehnsatz.

27. Wenn man zu der halben Summe zweyer Zahlen oder Grössen die halbe Differenz addiret/ so kommet die Grosse von ihnen heraus: subtrahiret man aber dieselbe von ihr/ so bleibet die kleine übrig.

Beweiß.

Die grosse Zahl bestehet aus der kleinen und ihrer Differentz von der grossen, und also die Summe beyder aus der Differentz und der kleinen zweymahl genommen. Da nun die halbe Summe aus der kleinen und der halben Differentz bestehet; so kommet die grosse heraus, wenn man die halbe Differentz dazu addiret, hingegen bleibet die kleine übrig, wenn man sie subtrahiret. W. Z. E.

Die 4. Aufgabe.

28. Aus zwey gegebenen Seiten eines Triangels AC und CB nebst dem Winckel C/ den sie einschliessen/ die übrigen Winckel zu finden.

I. 6.

Auflösung.

1. Sprechet:
   Wie die Summe der beyden Seiten AC und CB zu ihrer Differentz;
   So der Tangens der halben Summe der beyden gesuchten Winckel A und B
   zu dem Tangente der halben Differentz derselben.
2. Adiret diese halbe Differentz zu der halben Summe, so habet ihr den Winckel B, welcher der grösten von den gegebenen Seiten entgegen gesetzet ist.

ist. Subtrahiret sie von derselben, so bleibet der Winckel A übrig (§. 27).

Z. E. Es sey AC 75′, BC 58′, C 108° 24′; so geschiehet die Rechnung folgender massen:

AC	75′	AC	75′	A+B+C	179° 60′
BC	58′	BC	58	C	108 24
AC+BC	133′	AC−BC	17′	A+B	71° 36′
				½(A+B)	35° 48′

Log. AC+BC	2.1238516
Log. AC−BC	1.2304489
Log. Tang. ½(A+B)	9.8580694
Summe	11.0885183
Log. Tang. ½(A−B)	8.9646667′

dem in den Taffeln der Logarithmus Tangentis von 5° 17′ am nächsten kommet.

½(A+B)	35° 48′	½(A+B)	35° 48′
½(A−B)	5 17	½(A−B)	5 17
B	41° 5′	A	30° 31′.

Beweiß.

Verlängert die Seite AC in D, biß CD = BC, und machet CE = CB; so ist DA die Summe, EA die Differentz der beyden Seiten CB und CA, und DBE ein rechter Winckel (§. 86 Geom.). Man ziehe AG mit EB parallel; so ist bey G auch ein rechter Winckel und GAD = BED (§. 37. 72 Geom.), ingleichen GB der Tangens des Winckels GAB und GD der Tangens des Winckels GAD (§. 6). Nun ist DCB = CBA + CAB = CBE + CEB = 2CEB (§. 74. 79 Geom.), und also CEB, ingleichen CAG die

halbe Summe der gesuchten Winckel CBA und CAB, folgends BAG die halbe Differentz (§. 27). Derowegen verhält sich wie DA die Summe der beyden Seiten zu EA ihrer Differentz, also DG der Tangens der halben Summe der gesuchten Winckel zu BG dem Tangente der halben Differentz (§. 149 Geom.). W. Z. E.

Die 5. Aufgabe.

I. 7. 29. **Aus drey gegebenen Seiten eines Triangels die Winckel zu finden.**

Auflösung.

1. Beschreibet aus der Spitze des Triangels A mit der kleinen Seite AB einen Circul, so ist CD (weil AB = AD, (§. 27 Geom.) die Summe zweyer Seiten, FC ihre Differentz.
2. Sprechet: wie die Grund-Linie des Triangels BC zu der Summe der beyden Seiten AB + AC; So ihre Differentz FC. zu dem Stücke der Grund-Linie GC.
3. Ziehet GC von der Grund-Linie BC ab, so bleibet BG übrig.
4. Lasset aus A ein Perpendicul AE auf BG fallen, so ist BE = EG = $\frac{1}{2}$ BG (§. 95 Geom.) und ihr könnet aus den beyden Seiten AB und BE in dem rechtwinckelichten Triangel ABE die Winckel B und A; und in dem andern AEC aus den beyden Seiten AC und EC die Winckel C und A (§. 23) finden.

Z. E. Es sey AB = 36′, AC = 45′, BC = 40′. Die Rechnung geschiehet folgender massen:

AB

AB 36′	AC 45′
AC 45	AB 36
AB + AC 81	FC = 9

Log BC	1.6020600
Log. AB + AC	1.9084850
Log. FC	0.9542425
Summe	2.8627275
Log. GC	1.2606675

welchem in den Taffeln der Logarithmus von 18 am nächsten kommet. Wenn man aber weiter nachsuchet (§. 21); findet man endlich GC 1822‴

BC 4.0.0.0‴	EG 1089‴
GC 1822	GC 1822
BG 2178‴	EC 2911‴
BE 1089‴	

Log. AB	3.5563025
Log. Sin. Tot.	10.0000000
Log. EB	3.0370279
Log. Sin. A	9.4807254,

welchem in den Taffeln der Logarithmus von 17° 36′ am nächsten kommet. Und also ist B 72° 24′.

Log AC	3.6532125
Log. Sin. Tot.	10.0000000
Log. EC	3.4640422
Log. Sin. A	9.8108297,

welchem in den Taffeln der Logarithmus von 40° 19′ am nächsten kommet. Und also ist der Winckel C 49° 41′.

Solchergestalt sind in dem Triangel ABC der Winckel A 57° 55′, B 72° 24′ und C 49° 41′.

Beweis.

Es ist weiter nichts zu erweisen, als daß sich CB zu CD wie CF zu CG verhält: welches auf folgende Weise geschiehet.

Da y oder CBD zu seinem Maasse den halben Bogen GFD und x zu seinem den halben GBD hat (§. 84 Geom.); so ist $x+y=180°$. Nun ist auch $x+o=180°$ (§. 38 Geom.). Derowegen ist $o=y$ (§. 25 Arithm.). Da ferner der Winckel C den beyden Triangeln CGF und CBD gemein ist; so ist $CB:CD=CF:CG$ (§. 148 Geom.). W. Z. E.

Die 1. Anmerckung.

30. Weil BE und EC in Linien gegeben sind/so muß man auch in der Rechnung an stat 36' für AB 3600''' und an stat 45' für AC 4500''' annehmen.

Die 2. Anmerckung.

31. Wir wollen noch mit wenigem den Nutzen der Trigonometrie in Auflösung einiger geometrischen Aufgaben zeigen.

Anhang.

Die 1. Aufgabe.

I. 8. 32. **Eine Höhe AB (z. E. eines Thurms) zu messen/ zu der man aus einem angenommenen Stande E kommen kan.**

Auflösung.

1. Messet den Winckel ADC (§. 43 Geom.) und die Linie BE oder DC (§. 44 Geom.):
2. So wisset ihr auch den Winckel A, weil bey C ein rechter Winckel ist (§. 75 Geom.).
3. Suchet alsdenn die Linie AC (§. 20) und
4. Addiret dazu die Höhe des Instrumentes DE (=BC, weil die Linien CD und BE parallel und

CB

CB und ED auf BE perpendicular sind); so kommet die Höhe AB heraus. Wäre aber BE nicht Horizontal, so müste man das Stücke BC besonders messen (§. 171 Geom.).

Die 2. Aufgabe.

33. **Eine Höhe AB zu messen/ zu der man nicht kommen kan.** I. 9.

Auflösung.

1. Erwehlet euch zwey Stände in E und G, um so viel weiter von einander, je höher der Berg oder der Thurm ist, den ihr messen wollet, und messet aus denselben die Winckel ADC und AFC (§. 43 Geom.) über dieses die Stand-Linie GE oder DF (§. 44 Geom.).
2. Ziehet von dem Winckel AFC den Winckel ADF ab; so bleibet der Winckel FAD übrig (§. 74 Geom.).
3. Suchet aus den nunmehro bekandten Winckeln und der Seite FD in dem Triangel AFD die Seite AF, und
4. Aus dem Winckel F und der Seite AF in dem rechtwinckelichten Triangel die Seite AC (§. 20).
5. Endlich addiret zu der Höhe AC die Höhe des Instruments DE oder, wenn BC der Höhe des Instruments nicht gleich ist, suchet ferner FC und endlich BC im Triangel FBC (§. 20): so habet ihr die verlangte Höhe AB.

Die 3. Aufgabe.

34. **Aus zwey Fenstern E und F in verschiedenen Stockwercken eines Gebäudes** I. 10.

eine Höhe zu messen/ deren Spitze A man aus beyden Fenstern sehen kan.

Auflösung.

1. Messet durch einen Bleywurff die Höhe des andern Fensters uber dem ersten EF und des ersten über der Erde FG: und aus den Fenstern die Winckel AEC und AFD (§. 43 Geom.).
2. Addiret den Winckel AEC zu 90°, so habet ihr den Winckel AEF; subtrahiret von 90° den Winckel AFD, so bleibet der Winckel AFE übrig.
3. Addiret die beyden Winckel AEF und AFE, und ziehet die Summe von 180° ab; so bleibet der Winckel EAF übrig (§. 77 Geom.).
4. Suchet in dem Triangel AEF die Seite AF und ferner
5. In dem Triangel AFD die Seite AD (§. 20).
6. Endlich addiret dazu die Höhe des Fensters FG von der Erde; oder wenn GB nicht horizontal ist, suchet ferner DF und hernach vermittelst des Winckels DFB, den ihr gemessen (§. 43 Geom.) DB besonders (§. 20), so kommet die Höhe AB heraus.

Die 4. Aufgabe.

I. II. **35. Die Weite zweyer Oerter/ zu deren beyden man aus einem angenommenen Stande kommen kan/ zu messen.**

Auflösung.

1. Messet den Winckel C (§. 43 Geom.) und die Linien AC und CB (§. 44 Geom.): so könnet ihr
2. Den Winckel A (§. 28) und endlich die verlangte Weite AB (§. 20) finden.

Die

Die 5. Aufgabe.

36. **Die Weite zweyer Oerter AB/ zu deren einem B man aus einem angenommenen Stande C nur kommen kan (z. E. die Breite eines Flusses) zu messen.** I. 12.

Auflösung.

1. Messet die beyden Winckel B und C (§. 43 Geom.) und die Stand-Linie BC (§. 44 Geom.) so könnet ihr
2. Die verlangte Weite AB (§. 20) finden.

Die 6. Aufgabe.

37. **Die Weite zweyer Oerter AB/ zu deren keinem man kommen kan/ zu finden.** I. 13.

Auflösung.

1. Erwehlet drey Stände D, C und E in einer Linie und messet die Winckel ADC, ACD, BCE und BEC (§. 43 Geom.) nebst den beyden Stand-Linien DC und CE (§. 44 Geom.).
2. Subtrahiret die beyden Winckel ADC und ACD, wiederum ACD und BCE, und abermahl BCE und BEC von 180°; so bleibet im ersten Falle der Winckel DAC, im andern der Winckel ACB und im dritten der Winckel CBE übrig (§. 77. 78 Geom.). Alsdann könnet ihr
3. Die Seiten AC und BC (§. 20) und so ferner
4. Den Winckel CAB (§. 28) und endlich die Seite AB (§. 20) finden.

Die 7. Aufgabe.

38. **Die Verhältnis des Diametri eines Circuls zu seiner Peripheri zu finden.** I. 14.

Auflösung.

Wenn der Radius des Circuls CD 10 000 000 ist, so ist so wohl der Sinus AG, als Tangens ED des Bogens von einer Minute DA bey nahe 2909 und also muß der Bogen AD, welcher sonst etwas grösser ist als AG und kleiner als ED, gleichfalls bey nahe 2909 seyn. Multipliciret 2909 durch 21600, das ist die Zahl der Minuten in der gantzen Peripherie: so ist das Product 62834400. Derowegen verhält sich der Diameter zu der Peripherie bey nahe wie 20 000 000 zu 62834400, das ist, (wenn man beyderseits mit 200 000 dividiret) wie 100 zu 314 (§. 59 Arithm.).

ENDE der Trigonometrie.

Anfangs-

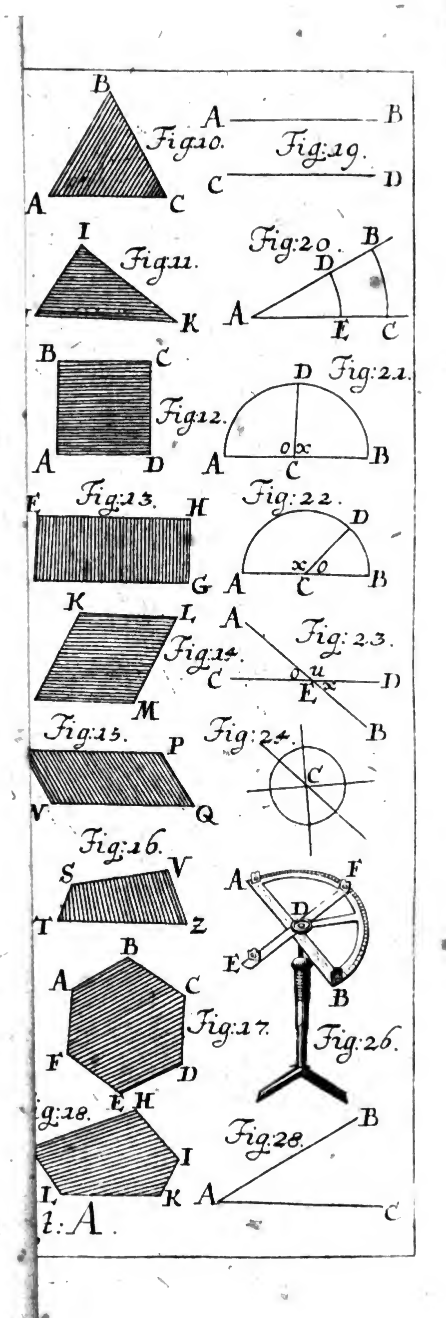
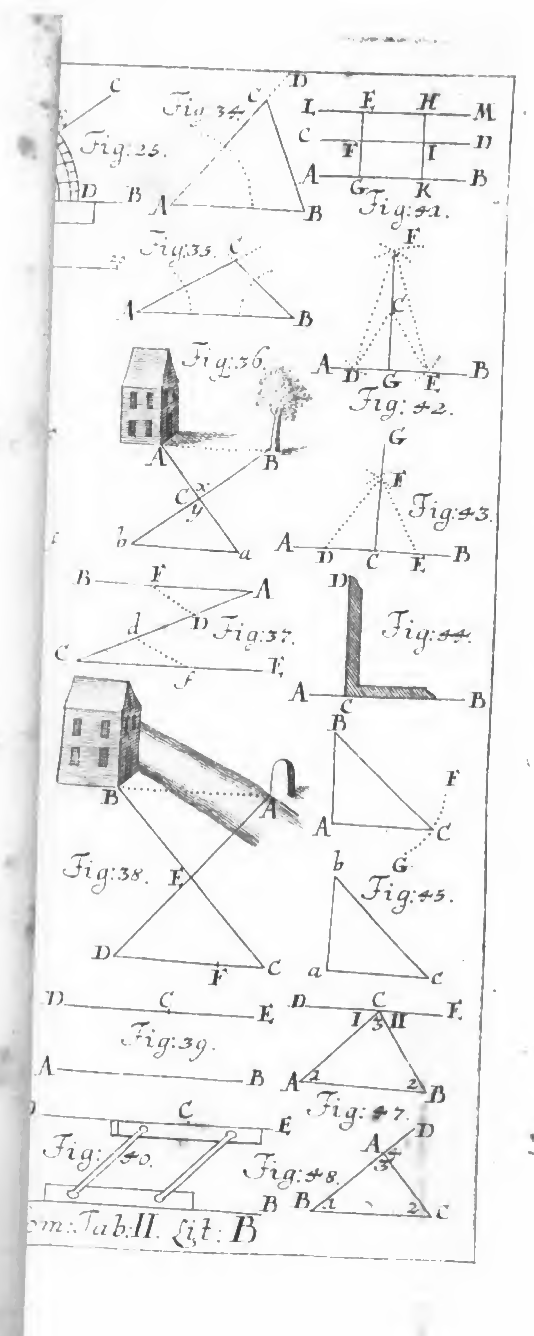
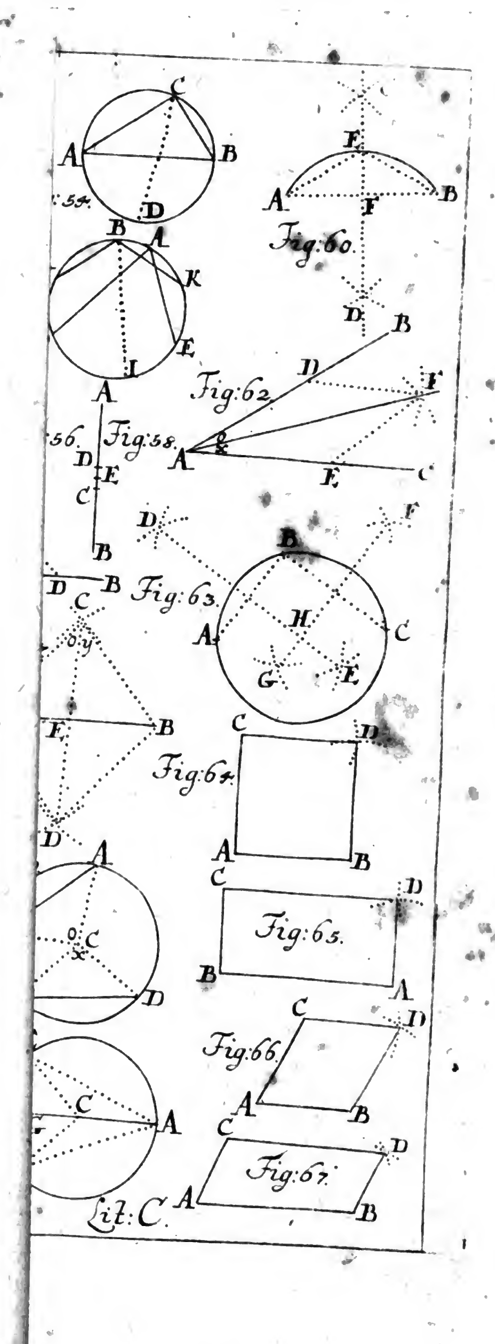


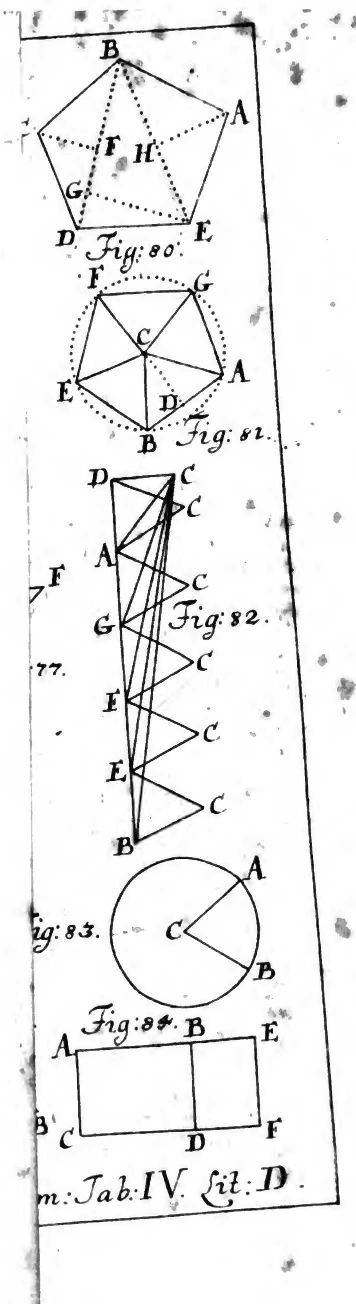
Fig.10.
Fig:19.
Fig:11.
Fig:20.
Fig:12.
Fig:21.
Fig:13.
Fig:22.
Fig:14.
Fig:23.
Fig:15.
Fig:24.
Fig:16.
Fig:17.
Fig:26.
Fig:18.
Fig:28.




Fig: 25.
Fig 34.
Fig: 41.
Fig: 35.
Fig: 36.
Fig: 42.
Fig: 43.
Fig: 37.
Fig: 44.
Fig: 38.
Fig: 45.
Fig: 39.
Fig: 47.
Fig: 40.
Fig: 48.
om: Tab. II. Lit: B


54
Fig:60
Fig:62
56
Fig:58
Fig:63
Fig:64
Fig:65.
Fig:66
Fig:67
Lit: C




B
A
F
H
G
D
E
Fig: 80
F
G
C
A
E
D
B
Fig: 81
D
C
C
A
F
C
G
Fig: 82
77
C
F
C
E
C
B
A
ig: 83
C
B
Fig: 84
B
E
A
C
D
F
m: Tab: IV. Lit: D.

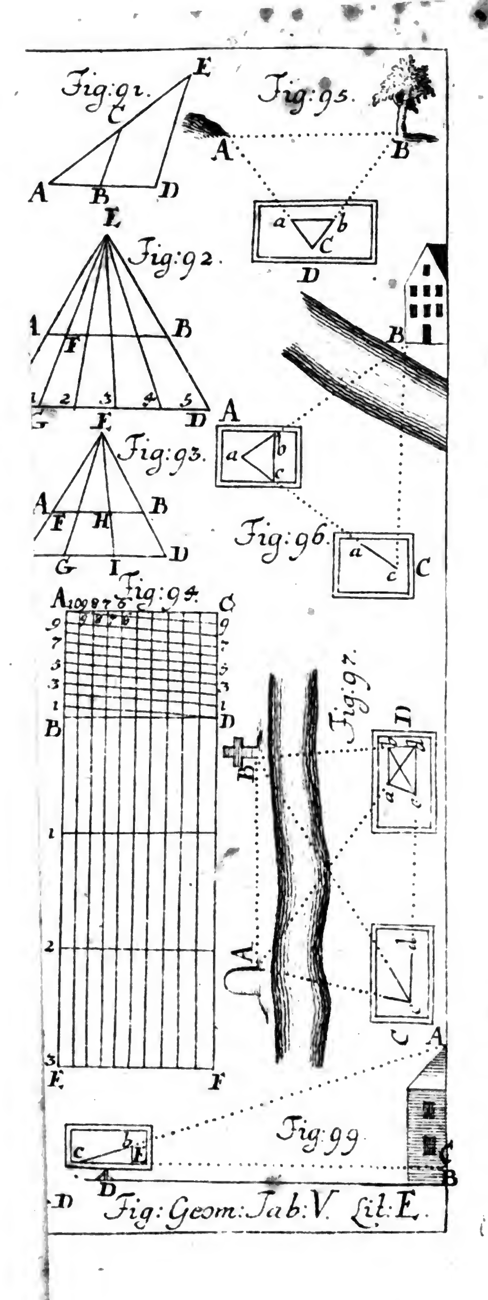


Fig:91.
Fig:92.
Fig:93.
Fig:94.
Fig:95.
Fig:96.
Fig:97.
Fig:99.
Fig: Geom: Tab: V. Lit: E.

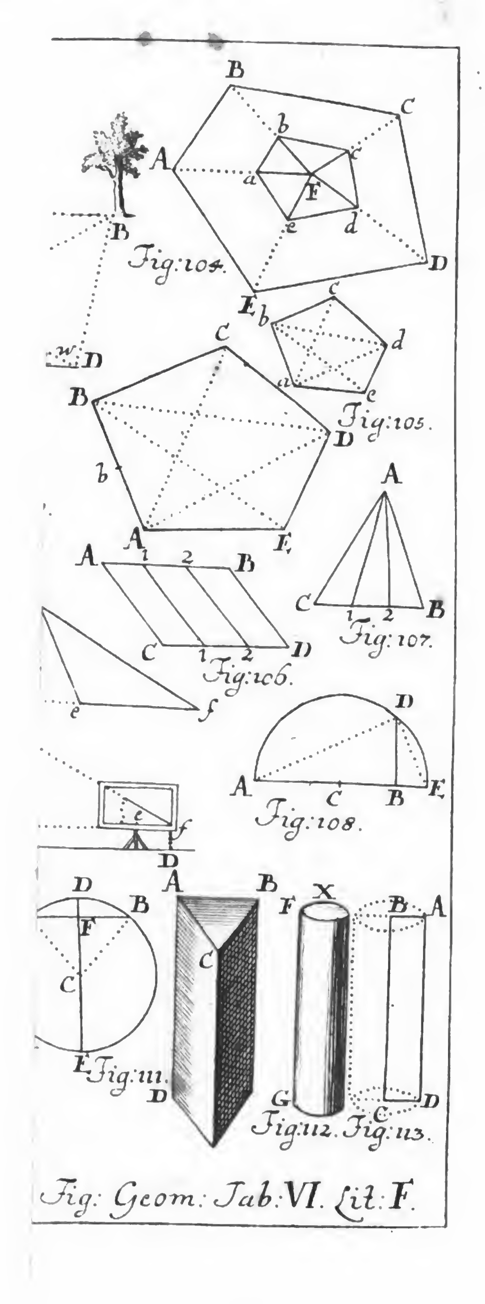


Fig: Geom: Tab:VI. Lit:F.

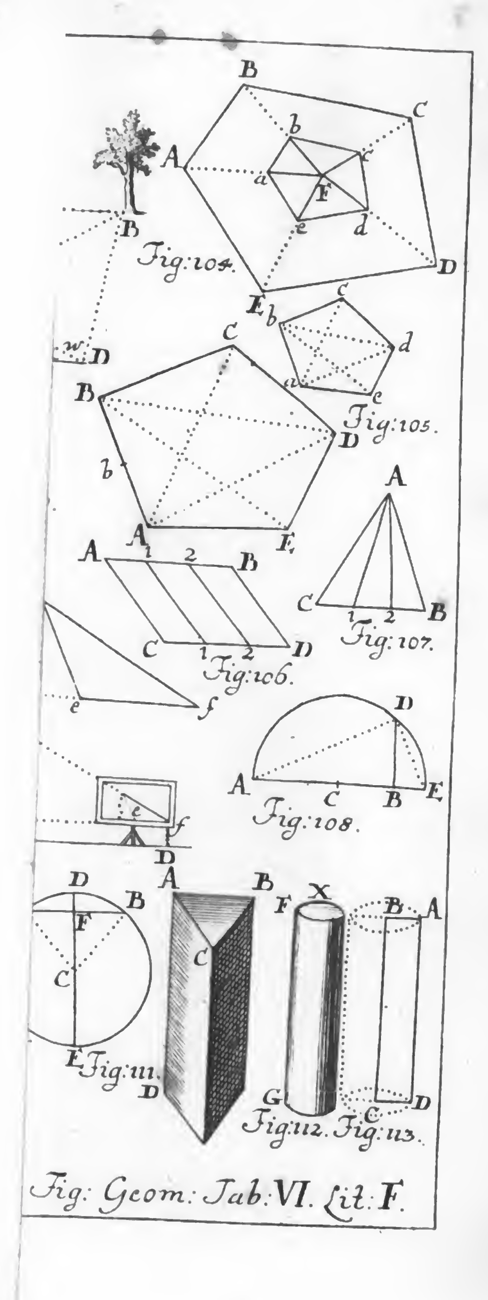


Fig: Geom: Tab: VI. Lit: F.

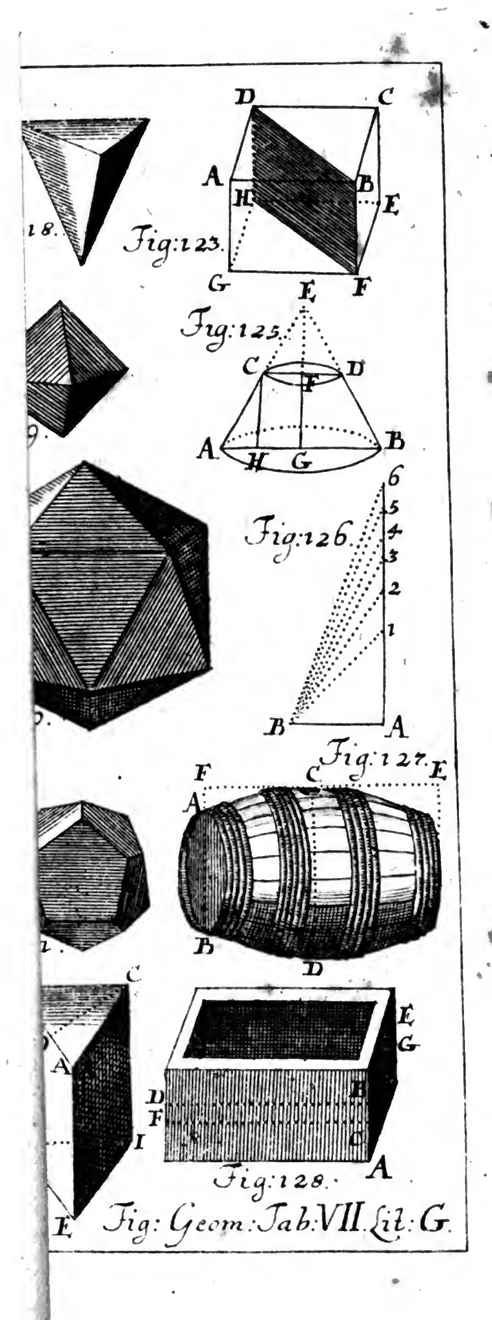


Fig: Geom: Tab: VII. Lit: G.

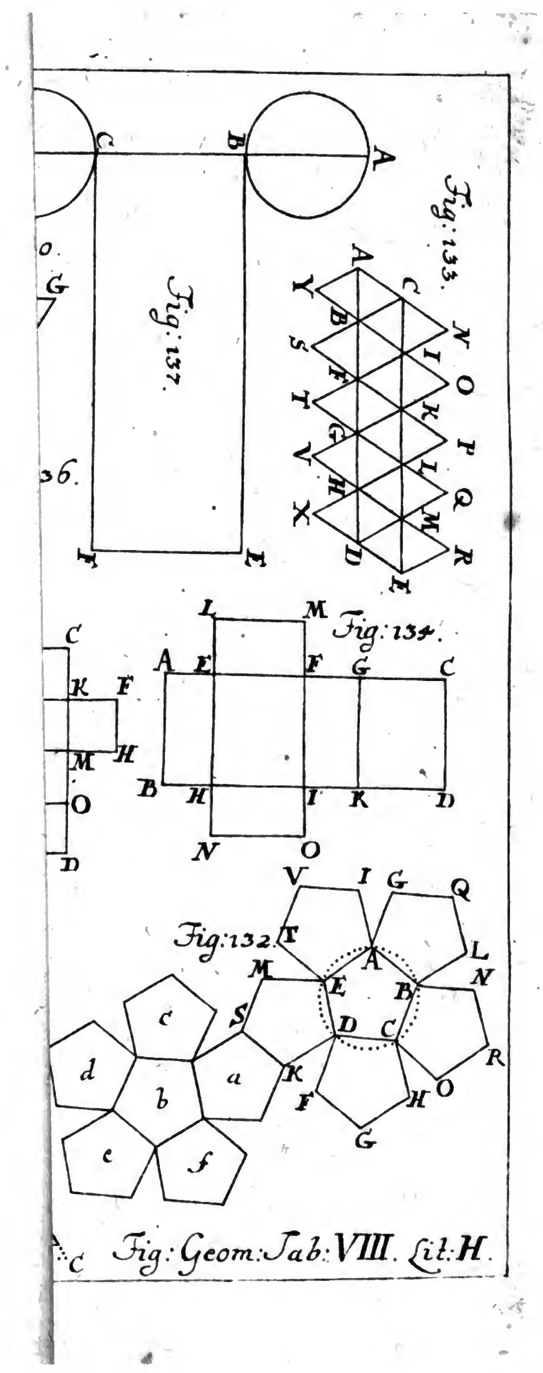


Fig: Geom: Tab: VIII. Lit: H.


BIBLIOT. ACADEM. LAUSAN
LIBERTÉ ET PATRIE



